GIANFRANCO BASTI

INTRODUZIONE ALLA LOGICA DEONTICA

Parte II:
Elementi di Logica delle Proposizioni

Schemi ad Uso degli Studenti
Roma 2008

1. Elementi di Logica Simbolica

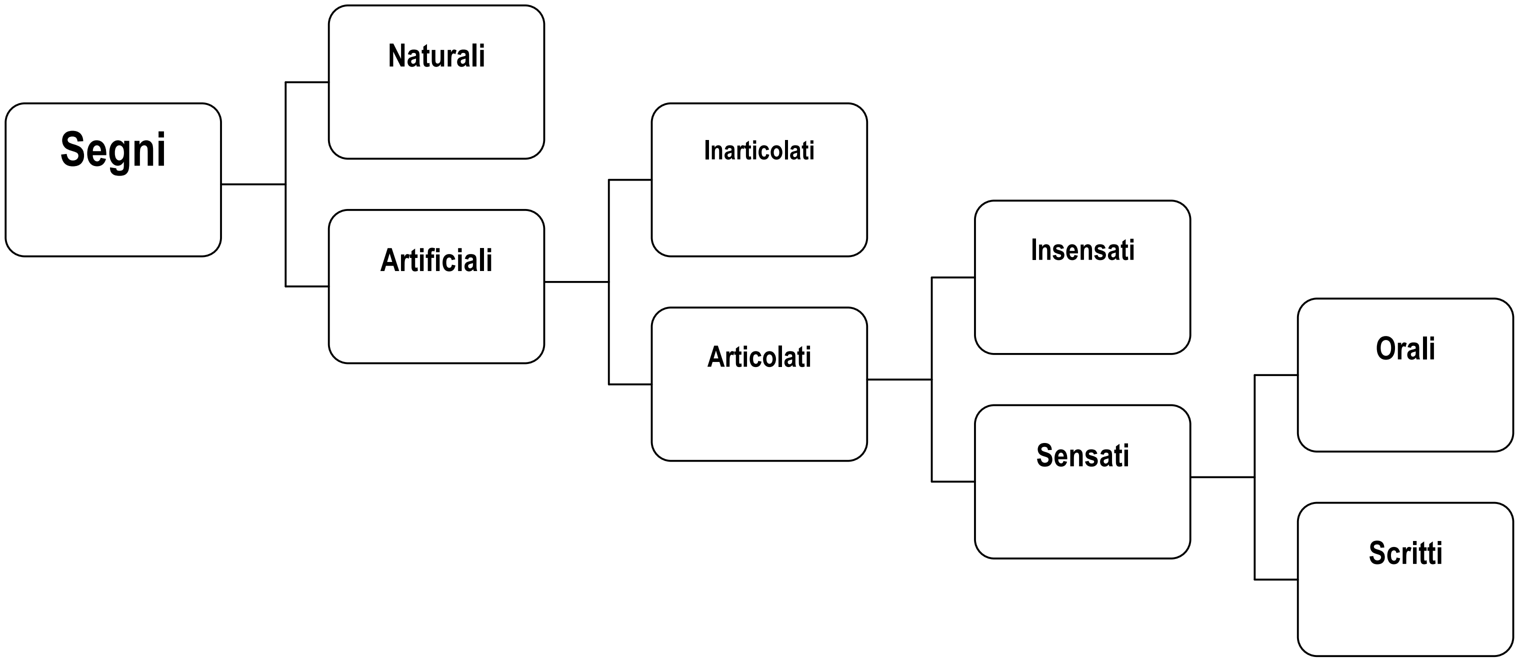
1.1. Logica e filosofia del linguaggio

1.1.1. Segni naturali e segni artificiali

- **Logica:** scienza delle leggi e delle forme del pensiero oggettivato in un linguaggio
- **Semiotica (o semiologia): «**scienza che studia cose, o proprietà di cose che fungono da segni» (*science studying things or thing properties acting as signs*) [Morris].
- **Segno:** qualcosa che sta per qualcos'altro (*something being for something else*)
  - Segni naturali **(o indici)**: **parti o effetti di oggetti (p.es. coda → gatto; fumo → fuoco)**
  - Segni artificiali: **definiti per mezzo di convenzioni di coloro che comunicano attraverso tali segni**
    - Segni artificiali non-articolati (***not articulated***): **segni il cui significato non dipende dalle relazioni con un sistena di segni simili (p.es., bandiere, ge-sti, etc.)**

- o Segni artificiali articolati (***articulated***): **segni il cui significato dipende dalle relazioni con un sistema di segni simili → varie forme di linguaggio (p.es., linguaggio vocale, scritto, dei gesti, dei fiori, delle bandiere, etc.).**
    - Segni articolati non dotati di senso (***not-meaningful***): **segni non appartenenti in maniera coerente al sistema di quel linguaggio (p.es., *cat* in italiano o *gatto* in inglese)**
    - Segni articolati dotati di senso (***meaningful***): **segni appartenenti in maniera coerente al sistema di quel linguaggio (p.es., *cat* in inglese o *gatto* in italiano)**
      - → Linguaggi orali
      - → Linguaggi scritti
- Tutti animali sono dotati di qualche forma di **comunicazione** (p.es., chimica, gestuale o anche orale) e **linguaggio naturale**, solo uomo capace di **metalinguaggio** (proprio come di autocoscienza e non solo di coscienza) → capace di conoscere (→ di definire e cambiare) le regole dei propri sistemi linguistici → capace di costruire **linguaggi convenzionali (artificiali)** → capace di **logica**.

SCHEMA RIASSUNTIVO



1.1.2. Linguaggio e metalinguaggio

- Generalmente il linguaggio ha per **referenti** oggetti extralinguistici
- Ma un certo linguaggio può avere per referente un **altro linguaggio**
- Pes., posso scrivere in **italiano** una grammatica della lingua **inglese**
- In tal caso, italiano = **metalinguaggio;** inglese = **linguaggio-oggetto**
- Normalmente, **linguaggio ordinario** = metalinguaggio dei linguaggi scientifici o **formalizzati,** cioè costruiti rigorosamente senza **ambiguità** o **incoerenze.**
- **Differenza fondamentale** fra linguaggi ordinari e formalizzati: mentre è possibile per un linguaggio ordinario essere metalinguaggio di se stesso (è possibile scrivere in italiano una grammatica dell'italiano), **nessun linguaggio formalizzato** può essere **metalinguaggio di se stesso** → carattere necessariamente **aperto** dei linguaggi scientifici (*vs.* **scientismo)**.
- Analisi logica di un linguaggio = **analisi metalinguistica** di quel linguaggio

1.1.3. Tripartizione della logica

- L'analisi logica o metalinguistica di un linguaggio può essere effettuata considerando **tre classi di relazioni** che le varie parti (parole, frasi, discorsi, etc.) possono avere:
  1. **Con il mittente o con il ricevente** di una comunicazione lingustica
  2. **Con altre parti del linguaggio**
  3. **Con gli oggetti** linguistici o extra–linguistici cui le parti del linguaggio si riferiscono
- Tripartizione della semiotica e della logica [C.W. Morris (1901-1979)]
  1. **Pragmatica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni con gli agenti della comunicazione ed alla capacità del linguaggio di modificare i comportamenti (p.es., pubblicità, retorica,etc.). → **Pragmatismo:** se utilità pratica **unico criterio** validità enunciati scientifici [C.S. Peirce (1839-1914)].
  2. **Sintattica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni linguistici fra di loro prescindendo sia dai contenuti che dagli agenti della comunica-

zione. **Sintattica o Logica formale:** parte della logica che studia la sintassi dei linguaggi. → **Formalismo**: se coerenza formale **unico criterio** validità enunciati scientifici [D. Hilbert (1862-1943)].

3. **Semantica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni con i loro oggetti intra– o extra–linguistici (= referenti). **Semantica o Logica materiale o Logica dei contenuti**: parte della logica che studia la semantica dei linguaggi. → **Realismo:** se verità (adeguazione all'oggetto) dei linguaggi scientifici considerata **sempre** fondamento della loro stessa coerenza formale.

  - **Realismo idealista** (Platone): se verità logica ottenuta per intuizione di universali logici esistenti in sé e per sé in un mondo ideale distinto dal mondo fisico e da quello mentale.
  - **Realismo naturalista** (Aristotele): se universali logici ottenuti per astrazione da generi naturali di individui del mondo fisico, gli unici esistenti in sé e per sé → esistenza degli universali logici nella sola mente umana.

- Logica è insieme **scienza** e **tecnica**:

- **Scienza**, in quanto le sue affermazioni possono venire **dimostrate** in forma rigorosa mediante la **deduzione** di determinate leggi a partire da **enunciati autoevidenti =** primi principi o **assiomi metalinguistici** (p.d.n.c.). Unica branca scientifica della logica è la logica formale → leggi logiche **=** tautologie.
- **Tecnica**, in quanto capace, a partire dalle leggi logiche di definire un **metodo** per le diverse forme di linguaggio innanzitutto delle altre scienze.

→ **Metodo =** insieme di **regole** o procedure di inferenza o di dimostrazione derivate dalle leggi logiche e con validità **limitata** all'oggetto e alle finalità teoriche o pratiche delle diverse scienze. → Ogni scienza si caratterizza per un suo metodo di validazione (determinazione dell'utilità/coerenza/verità) dei propri asserti.

1.1.4. Alcune questioni di semantica

1.1.4.1. Connotazione e denotazione

- Allorché ci riferiamo al problema del **significato di un'espressione linguistica** come problema del **riferimento ad un oggetto** occorre distinguere una duplice componente del significato.

- Nei termini delle **scienze cognitive** e della **teoria dell'intenzionalità** la distinzione è fra **intendere** (*intending*) e **riferirsi** (*referring*) [McIntyre]. Nella comunicazione fra soggetti intenzionali, se non c'è accordo **su ciò che si intende** (*about what is intended*) con un'espressione linguistica, non può esservi accordo **su ciò cui l'espressione si riferisce** (*about which the expression is referring to*).

- In logica, G. Frege (1848-1925), con una distinzione molto famosa tra i filosofi, ma ambigua e rifiutata dagli altri logici, parla della distinzione fra **Sinne** (senso, *sense*) e **Bedeutung** (significato, *meaning*).
- J. Stuart-Mill (1806-1863), usa la distinzione, molto più usata dai logici, fra **connotazione** e **denotazione** di un'espressione.

- R. Carnap (1891-1970), usa la distinzione ancora più usata fra **intensione** ed **estensione** di un'espressione.
- P.es., l'espressione "stella del mattino" e "stella della sera" sono due espressioni che **connotano** un modo diverso il medesimo **denotato** extralinguistico: il pianeta Venere.
- → Perché due espressioni siano considerate **semanticamente identiche** e dunque reciprocamente sostituibili, non è sempre sufficiente che abbiano la medesima **estensione,** che siano cioè **equivalenti**. P.es., l'espressione (predicato) **"essere acqua"** ed **"essere H_2O**" sono equivalenti: la stessa classe di oggetti soddisfa (rende veri) ambedue i predicati.
- Ma mentre nei linguaggi scientifici (p.es. in chimica) è lecito sostituire predicati con estensione equivalente non così in altri linguaggi → Differenza fra i linguaggi scientifici e non → fra logiche **estensionali** e logiche **intensionali**.

1.2.Elementi di metalogica

1.2.1. Linguaggi ordinari e simbolici

- I linguaggi scientifici della **scienza moderna** sono oggi **tutti linguaggi simbolici** perché, a partire dalla nascita della **logica simbolica,** mediante la **logica matematica** o **logistica** (fine secolo XIX, inizio secolo XX)**,** qualsiasi contenuto del linguaggio ordinario può essere espresso in un appropriato linguaggio simbolico.
- Viceversa, anche se con non poche difficoltà, il linguaggio ordinario può essere usato come **metalinguaggio** di qualsiasi linguaggio scientifico.
- Esempi:
  - $\langle 2+3=5 \rangle$ «tre più due è uguale a cinque»
  - $v=\dfrac{s}{t}$ «la velocità è il rapporto fra lo spazio e il tempo»
  - $SO_4Cu+Zn=SO_4Zn+Cu$ «se in una soluzione di solfato di rame immergiamo una lamina di zinco, il rame si deposita sullo zinco, mentre questo va in soluzione come solfato a sostituire il rame»
- **Vantaggi** dei linguaggi simbolici: brevità, semplicità, rigore, universalità, univocità.

1.2.2. Linguaggi come sistemi di segni

- Ogni linguaggio, orale o scritto, simbolico o ordinario, suppone un **dizionario** ((*dictionary*) = insieme di segni) e una **grammatica** ((*grammar*) = insieme di regole).
- Più generalmente, ogni segno o sotto–insieme di segni di un dato linguaggio costituisce un'**espressione** (*expression*) [linguaggio ordinario] o una **formula** (*formula*) [linguaggio simbolico].
- Due o più espressioni sono dette **equiformi** o **isomorfe** (*isomorphic*) se hanno la stessa forma grafica (a,a – G, G, etc.), **diversiformi** o **dismorfe (***dismorphic*), altrimenti.
- Combinando i segni secondo le regole →
  → espressioni **dotate di senso** (*meaningful expressions*) [linguaggio ordinario]
  → formule **ben formate,** fbf (*well formed formulas, wff*) [linguaggio simbolico]
  siano esse **vere** o **false.**
- Ogni segno o complesso di segni con **un senso determinato** all'interno di un determinato linguaggio costituisce un **simbolo** (P.es., "+" in aritmetica significa "somma-

re"; "⊃" e "C" significano "implica" (*implies*) rispettivamente nel linguaggio simbolico di Peano-Russell e in quello di Łukasiewicz.

- Ogni **simbolo** (p.es., Giovanni) denota qualcosa:

1. o se stesso, ovvero un simbolo equiforme a se stesso per cui, per essere grammaticalmente corretti, useremo le virgolette **"…"**, come nelle espressioni «"Giovanni" è un nome proprio», «"Giovanni" è composto di otto lettere»
2. o qualcosa di distinto da sé, come nelle espressioni «Giovanni ama Laura» o «Giovanni è un ragioniere», dove usare le virgolette sarebbe gravemente scorretto. Infatti «"Giovanni" ama Laura» non ha alcun senso.
   - I logici scolastici parlavano a tale proposito, rispettivamente di:
   1. simbolo preso **in supposizione** (*quasi pro alio positio*) **materiale**
   2. simbolo preso **in supposizione formale**

   - Carnap parla a tale proposito, rispettivamente di:

   1. simbolo **autonimo** (*self-naming*)

2. simbolo **non autonimo** (*not self-naming*)

- Ogni espressione dotata di senso di cui si può dire che è **vera** o **falsa** costituisce una **proposizione** (*proposition*). P.es., "Il Vesuvio è il vulcano di Napoli" o "L'Etna è il vulcano di Napoli" sono due proposizioni, l'una vera l'altra falsa. "Vorrei un mondo migliore" è espressione dotata di senso (pragmatico), ma non aletico perché non può essere né vera né falsa.
  - Di una stessa proposizione si possono formulare diversi **enunciati** (*sentences*) nel medesimo o in diversi linguaggi. P.es.:
    - "Giovanni ama Laura" e "Laura è amata da Giovanni" sono due enunciati diversiformi della medesima proposizione nello stesso linguaggio.
    - "John is twenty-eight years old" e "Giovanni ha ventott'anni" sono due enunciati diversiformi della medesima proposizione in diversi linguaggi.
  - Di una medesima proposizione o enunciato sul piano sintattico si possono formulare diversi **asserti** (*statements*) equiformi con significati pragmatici diversi in contesti diversi. P.es.,
    - "Oggi è una bella giornata" pronunciata da un contadino che può finalmente uscire a lavorare o da un bagnante che può finalmente andare al mare sono

proposizioni sintatticamente equiformi, semanticamente vere denotanti lo stesso oggetto (il sole che splende in cielo), ma connotanti situazioni profondamente diverse.

- Un espressione dotata di senso, sia essa costituita da un solo segno o da un complesso di segni, ma a cui non può essere attribuito alcun valore di verità (o falsità) è detta **termine.** P.es., “piove”, “implica”, “Giovanni”, “vorrei un mondo migliore”.

1.2.3. Espressioni determinate e determinanti

- Con **termine**, a partire da Aristotele e generalmente in logica, s’intende sia «l’elemento in cui si risolve la proposizione, cioè, sia **ciò che è predicato**, sia **ciò di cui è predicato** con l’aggiunta di essere o non essere» (*An.Pr.*, 24b, 16-18).

- Nell’analisi logica del linguaggio ordinario, il primo senso di «termine» è ciò che viene designato con l’espressione «**predicato verbale»** o «**predicato nominale**», il secondo senso è ciò che viene designato con l’espressione «**soggetto**» e/o «**complemento**» del predicato. Essi generalmente corrispondono grammaticalmente a «**nomi**», ovvero termini che designano o un individuo (p.es., «Giovanni») o una collezione di individui (p.es., «uomo»).

- P. es., in “Giovanni è un medico”, «Giovanni» è soggetto «è un medico» è predicato nominale; in “Giovanni ama (è amante) Maria”, «Giovanni» è soggetto «ama (è amante)» è predicato verbale, «Maria» è complemento–oggetto.

- → Distinzione in ogni proposizione fra **termini determinanti** (predicati) e **termini determinati** (nomi).
- Nella **logica scientifica** (logica come scienza o logica formale), il termine determinante è designato come **predicato,** *predicate* (o **funtore,** *funktor*)**;** i(l) termini(e) determinati(o) come **argomenti(o),** *arguments(argument)* del predicato.
- Due principali differenze con l’analisi logica del linguaggio ordinario:

1. Argomento(i) del predicato sono i termini che fungono sia da soggetto, sia da complementi nella proposizione → **predicati** possono essere sia **mono,** che **bi-**, che **tri-**, che ***n*-argomentali** (con $n > 0$). P.es.:

- “Giovanni corre”, ovvero “corre(Giovanni)”, «corre» è **monoargomentale.**
- **“**Giovanni ama Maria”, ovvero “ama(Giovanni, Maria), «ama» è **bi-argomentale.**
- “Giovanni poggia il libro sul tavolo”, ovvero “poggia(Giovanni, libro, tavolo)”, «poggia» è **tri-argomentale**.

2. Con **predicato** s’intende in logica non solo i verbi (*verbs*), ma **ogni espressione che determina un’altra espressione**, sia essa un termine (nome) o un’altra pro-posizione → Distinzione fra:

   a. **Predicati terminali,** predicati che hanno per argomento termini → **logica dei termini** (studio della costituzione di singole proposizioni);

   b. **Predicati proposizionali,** predicati che hanno per argomento proposizioni → **logica delle proposizioni** (studio della costituzione di catene di proposizioni)**.** P.es.:

- In “Giovanni non corre”, «corre» determina «Giovanni» (= predicato terminale monoargomentale), ovvero «corre(Giovanni)», ma «non» **determina l’intera proposizione** «Giovanni corre» ovvero «**non**(Giovanni corre)»: **non** (*not*) = predicato proposizionale monoargomentale.
- In “Se piove, allora mi bagno”, «**se…allora** (piove, mi bagno): **se…allora** (*if…then*) = predicato proposizionale bi–argomentale.
- In “Piove e tira vento e mi bagno”: «**e**(piove, tira vento, mi bagno): **e** (*and*) = predicato proposizionale tri-argomentale.

• Quei predicati che in **logica formale** (sintassi) sono connotati come «predicati terminali», in **semantica** sono connotati come **predicati categorematici** o **descrittivi** (*descriptive predicates*). Sono infatti termini che denotano (si riferiscono a, *are referring to*) o una **proprietà** (*property*) o un’**operazione** (*operation*) **extra-linguistiche** le quali determinano **l’oggetto extra-linguistico** denotato dal termine che costituisce l’argomento del predicato. P.es.:
  - In “Giovanni corre” (*John is running*), il predicato «corre» denota l’azione del correre che determina Giovanni in una sua particolare operazione.

- In “Giovanni è uomo” (*John is human*), il predicato «essere uomo» denota la natura umana che determina Giovanni come un appartenente alla specie umana.

- Quei predicati che in **logica formale** (sintassi) sono connotati come «predicati proposizionali», in **semantica** sono connotati come **predicati sincategorematici** o **non-descrittivi** o **connettivi logici** (*logical connectives*). Sono infatti termini che denotano i **legami logici** (*logical links*) **intra-linguistici** fra proposizioni.

1.2.4. Variabili, costanti e funzioni proposizionali in logica formale

- La logica formale s’interessa esclusivamente della **forma** o **struttura sintattica** delle espressioni linguistiche, sia in logica delle proposizioni (forme di concatenazione (*connection forms*) fra proposizioni, p.es., nella costruzione di argomentazioni deduttive), sia in logica dei termini (forme di concatenazione fra termini, nella costruzione di proposizioni).

- In matematica, per evidenziare **la medesima struttura** di un'infinità di proposizioni matematiche, p.es., di tipo numerico, è largamente usata la distinzione fra **variabili** (*variables*) e **costanti** (*constants*).
  - P.es., l'espressione "$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$" denota la struttura di un'infinità di proposizioni aritmetiche **corrette,** ottenute sostituendo ai **segni** «*a*» e «*b*» un qualsiasi **simbolo numerico** con la seguente semplice regola (R1):

R 1: ***Segni*** *equiformi devono essere* ***sempre*** *sostituiti con* ***simboli*** *equiformi, anche se non è vero l'opposto: simboli equiformi, possono essere correttamente sostituiti con segni diversiformi.*

  - P.es., se ad «*a*» e «*b*» sostituisco lo stesso simbolo numerico («1», «2», «3», …), si ottengono proposizioni aritmetiche ugualmente corrette.
- Nella suddetta espressione algebrica (l'algebra intesa come logica formale della matematica) «*a*» e «*b*» sono dette **variabili**, tutti gli altri simboli, «( )», «+», «^{2}», «=», «2» sono dette **costanti.**

- «*a*» e «*b*» sono «variabili numeriche» perché sono segni (= espressioni senza un significato numerico determinato) che possono essere correttamente sostituite da simboli numerici (= espressioni con un significato numerico determinato) diversi.
- Le «costanti» sono tali perché sono simboli e non segni: hanno già un significato determinato (p.es., “sommare” “essere uguale a”) e quindi non possono essere correttamente sostituite da altri simboli.
  - E’ facile constatare che le costanti nella nostra espressione algebrica corrispondono ad altrettanti **predicati,** terminali (p.es., «2») e proposizionali (p.es., «=»), e le **variabili** ai loro argomenti, terminali e proposizionali.
- → Per analogia con la matematica, anche in **logica formale** si distingue fra **costanti** (= predicati proposizionali e terminali) e **variabili** (i loro argomenti).
- Nel caso della **logica delle proposizioni** (*propositional logic*)**,** sostituendo **variabili proposizionali equiformi** (segni)**,** con **proposizioni equiformi** (simboli), secondo la regola R1, otterrò validamente altre proposizioni (espressioni dotate di senso che possono essere vere o false)

- P.es., nel caso del predicato proposizionale, «e» (= congiunzione logica), “*p* e *q*” è un espressione che esprime la struttura formale di un’infinità di congiunzioni logiche valide che si ottengono sostituendo alle **variabili proposizionali** «*p*» e «*q*», altrettante **proposizioni,** applicando la regola R1.
    - P.es., “piove e la terra è umida”, “S. Giovanni è apostolo e evangelista” (**vere**), “Antonio è cattolico e protestante” (**falsa)**.

- La scoperta che sia possibile sostituire lettere a proposizioni è la scoperta fondamentale di Aristotele che è alla base della nascita della logica formale.

- Ugualmente, in **logica dei termini** (o **logica dei predicati)** (*term logic* or *predicate logic*), sostituendo **variabili terminali equiformi** (segni)**,** con **termini equiformi** (simboli), secondo la regola R1, otterrò validamente altre proposizioni (espressioni dotate di senso che possono essere vere o false).
    - P.es., nel caso del predicato terminale «essere uomo», l’espressione “*x* è uomo” è un espressione che esprime la struttura formale di un’infinità di proposizioni valide che si ottengono sostituendo alla **variabile terminale** «*x*» altrettanti **termini,** applicando la regola R1.

- “Giovanni è uomo”, “Luigi è uomo”, “i Greci sono uomini”, etc.

- Tuttavia, se sostituiamo a variabili proposizionali **termini** e non **proposizioni,** si otterranno espressioni prive di senso che non possono essere proposizioni.
  - “Se *p* allora *q*” con le sostituzioni valide (*valid*) , «*p*» = «piove» e «*q*» = «la terra è umida», produce correttamente la proposizione «se piove, allora la terra è umida» (**vera**).
  - Similmente, con le sostituzioni valide, «*p*» = «piove» e «*q*» = «il cerchio è quadrato», produce correttamente la proposizione «se piove, allora il cerchio è quadrato» (**falsa**).
  - Invece, con la sostituzioni invalide, «*p*» = «pioggia» e «*q*» = «umida», produce l’espressione priva di senso «se pioggia, allora umida», che non può essere né vera né falsa, e dunque **non è una proposizione**.

- Tutte le espressioni **che contengono variabili** (terminali o proposizionali) che, se correttamente sostituite (da termini o da proposizioni), producono proposizioni, sono dette **funzioni proposizionali,** in analogia alla nozione fondamentale della **matema-**

tica moderna di **funzione matematica,** $f(x)$, le cui **variabili** possono essere validamente sostituite solo da termini che sono simboli numerici (numerali).

- Come si vede, con la nozione di **funzione proposizionale,** definita da G. Frege al termine del secolo XIX, la logica ha imparato a simbolizzare con lettere o altri segni non solo le **variabili**, gli argomenti dei predicati, ma **i predicati stessi** (terminali e proposizionali), simbolizzando completamente la logica formale → nascita della **logica simbolica.**
- Questa può essere definita **la più importante scoperta** della logica formale**, dopo l'invenzione della logica formale stessa** ad opera di Aristotele e degli Stoici**.**
- La definizione della funzione proposizionale come "espressione che contiene variabili e che dunque non è una proposizione" è **ambigua.** Infatti, se non è una proposizione, non potrebbe essere **mai** né vera né falsa.
- Tuttavia: l'espressione: "per tutti i *p* e *q*: se *p* allora *q*; ma *p*; dunque *q*" è **sempre vera** (è una legge logica), pur contenendo variabili proposizionali. Oppure, l'altra espressione "per qualche *x*: se *x* è studente, allora *x* è presente nell'università" è su-

scettibile di essere **vera** (per gli studenti presenti) o **falsa** (per gli studenti assenti), pur contenendo variabili terminali.

- In ambedue questi casi, tuttavia, non siamo in presenza di vere e proprie variabili, visto che sono **vincolate** (*bounded*) da **quantificatori** (*quantifiers*), rispettivamente **universale** ("per tutti", *universal quantifier*), ∀, e **particolare** o **esistenziale** ("per qualche", *particular or existential quantifier*), ∃.

- → Sono dunque propriamente «funzioni proposizionali» solo quelle espressioni che contengono **variabili libere** (*free*) o **non-vincolate** (*unbounded*) da quantificatori.

1.3. Dalla logica formale alla logica simbolica

1.3.1. Logica formale

- Studio delle **forme** corrette di **inferenza logica**
- **Inferenza logica =** processo linguistico — corrispondente al **ragionamento** nella conoscenza — attraverso cui si arriva ad asserire **correttamente** una proposizione (= **conclusione**) sulla base di una o più proposizioni prese come punto di partenza del processo (= **premesse**).

1.3.2. Logica sillogistica (logica dei predicati elementare)

- Prime forme di inferenze studiate dalla logica formale sono state le **inferenze sillogistiche** o **sillogismi** di Aristotele.
- «(Il metodo sillogistico è quel metodo) che ci dice **come troveremo sempre sillogismi per risolvere qualsiasi problema** (deduzione) e **per quale via potremo assumere le premesse appropriate per ciascun problema** (induzione/abduzione)» (*An. Pr.*, I,27,43a20-22).
- Oggetto delle inferenze sillogistiche sono **proposizioni semplici** o **categoriche** (Aristotele) o **atomiche** (logica moderna) **costituite cioè da soggetto + predicato** (p.es.: tutti gli uomini sono mortali) → **sillogismo =** parte della **logica dei termini.**
- **Sillogismo**: inferenza che ha per oggetto la connessione corretta (o valida) di **termini** all'interno della conclusione a partire dalla connessione che i termini hanno nelle proposizioni che costituiscono le premesse del sillogismo attraverso l'applicazione di **regole.**
- «La dimostrazione è sillogismo, ma **il sillogismo non è tutto dimostrazione**» (*An. Pr*. 25b, 31).

- «Da un lato il sillogismo che si costituisce attraverso il medio (il sillogismo deduttivo, *N.d.R.*) viene prima per natura ed è più evidente. D'altro lato, **il sillogismo che si sviluppa per induzione è per noi il più ricco di conoscenza**» (*Post. An.*¸II, 23, 68b, 35s.). → Distinzione fra:
  - **Sillogismi deduttivi =** inferenze **necessarie** da premesse generali a conclusioni particolari
  - **Sillogismi induttivi** = inferenze **non-necessarie** da premesse particolari a conclusioni generali → costituzione delle premesse di sillogismi deduttivi.
- Fra i sillogismi deduttivi, distinzione fra:
  - **Sillogismi apodittici (dimostrativi)** = inferenze deduttive fondate su premesse **necessariamente vere (= assiomi:** P.es.: **"**Gli animali sono mortali e i cavalli sono animali, dunque i cavalli sono mortali"**).** Per Aristotele, sono tipici delle scienze logiche, matematiche e metafisiche. Oggi solo delle scienze logiche e metafisiche.
  - **Sillogismi ipotetici** = inferenze deduttive fondate su premesse **non necessariamente vere (= postulati:** P.es., "Se l'acqua bolle a cento gradi e l'acqua di questo recipiente è a cento gradi, allora l'acqua di questo recipiente bolle"**)**. Tipici

delle scienze fisiche e naturali, perché le proposizioni categoriche dei sillogismi ipotetici riguardano enti ed eventi fisici, dunque contingenti

- → Con la sillogistica, invenzione dei primi **sistemi assiomatici,** apodittico–deduttivi e ipotetico–deduttivi, sistemi di proposizioni delle quali, esclusivamente, alcune sono le **proposizioni–base** (assiomi o postulati), le altre le **proposizioni–derivate** (teoremi). Oltre la sillogistica, tipico sistema assiomatico dell'antichità sono gli *Elementi* di Euclide (sistema assiomatico di aritmetica e geometria).
- → Distinzione in logica fra:
  - **Metodi assiomatici:** insieme di regole per la costruzione di sistemi assiomatici corretti.
  - **Metodi analitici:** insieme di regole per la costruzione delle premesse di sistemi assiomatici,
    - siano esse **apodittiche** (p.es., il metodo per la ricerca del termine medio nei sillogismi dimostrativi)
    - siano esse **ipotetiche** (p.es., il metodo per la costruzione corretta di sillogismi induttivi, finalizzati alla costituzione di premesse di sillogismi ipotetici delle scienze naturali).

- «Il necessario, poi, è più ampio del sillogismo, poiché tutti i sillogismi (deduttivi) sono necessari, **ma il necessario è più ampio del sillogismo**» (*An. Pr.*, 47a, 33-35).
  - **Due sensi** di quest'affermazione di Aristotele:
    - Oltre la necessità **logica** esiste la necessità **ontologica** della causalità — distinzione persa con Kant nella modernità per la fondazione della necessità causale nelle scienze fisiche sulla necessità logica, causa la riduzione della fisica al sistema assiomatico della meccanica newtoniana (= meccanicismo). Riduzione oggi entrata in crisi in fisica dopo lo sviluppo della **meccanica quantistica** e soprattutto della **fisica dei sistemi complessi.**
    - Oltre la necessità **logica** delle deduzioni sillogistiche apodittiche esiste la necessità degli **argomenti** costituiti non da proposizioni semplici o atomiche, ma da proposizioni complesse o **molecolari**, studiati, in logica delle proposizioni, dalla **teoria della dimostrazione**, le cui **leggi** sono state studiate per la prima volta dalla **logica stoica**.

1.3.3. Teoria della dimostrazione (logica delle proposizioni)

- Distinzione fra **proposizioni atomiche e molecolari** scoperta da Aristotele, ma sviluppata e studiata dalla **logica stoica,** sviluppata da Galeno e, attraverso Boezio, introdotta nella logica medievale e quindi in quella moderna.
- Le proposizioni atomiche sono le proposizioni costituite da **termini**, le proposizioni molecolari sono costituite da **proposizioni semplici e connettivi logici** (congiunzioni o **predicati proposizionali**) e furono definite da Galeno per la prima volta **ipotesi**.
  - «Un altro genere di proposizioni è quello nel quale facciamo asserzioni non sullo stato delle cose (= proposizioni categoriche), ma intorno a se c'è qualcosa cosa c'è, e se non c'è quel qualcosa cosa c'è; si chiamino poi **ipotetiche** siffatte proposizioni» (GALENO, *Inst. Log.*, III,1).
  - «Fra le proposizioni alcune sono dette categoriche, altre ipotetiche. **Categorica** è quella proposizione che ha un soggetto e predicato come parti principali come "un uomo corre"… **Proposizione ipotetica** è quella che ha (almeno) due categoriche come parti principali, come "se un uomo corre allora si muove"… Fra le

proposizioni ipotetiche, alcune sono condizionali, altre sono congiunzioni, altre sono disgiunzioni, etc.» (PIETRO ISPANO, *Summ. Log.*, I, 1.07, 1.22).

- → Scoperta che alcune delle proposizioni molecolari sono **leggi logiche o tautologie,** ovvero proposizioni **sempre vere in tutti i mondi possibili**, indipendentemente dal **significato** delle proposizioni semplici che le compongono nonché dal loro **valore di verità** (nelle logiche a due valori: **vero,** "**1**", **falso**, "**0**").
- → Distinzione fra **leggi e regole logiche** → teoria della dimostrazione o logica proposizionale è divenuta la **parte principale della logica formale**.
- Proprio perché, a differenza del sillogismo dimostrativo o apodittico, la **validità dimostrativa** nelle proposizioni ipotetiche è **indipendente** da affermazioni su stati di cose e quindi dalla **verità semantica** delle premesse**,** allora**:**
  - 1) Distinzione fra
    - **Verità sintattica** (o validità (*validity*) o correttezza (*correctness*)) delle proposizioni = **conformità** (*conformity*) alle **leggi logiche** e
    - **Verità semantica** (o fondatezza (*soundness*)) delle proposizioni = **conformità** (*conformity*) **allo stato delle cose** (*state of affairs*).

- 2) Distinzione fra:
    - Argomentazioni **valide** (*valid*) (o corrette, *correct*) e **fondate** (*sound*)
      P.es.: «Se è giorno c'è luce, ma è giorno, dunque c'è luce» affermato di giorno.
    - Argomentazioni **valide** e **infondate** (*unsound*)
      P.es.: «Se è giorno c'è luce, ma è giorno, dunque c'è luce» affermato di notte.
    - Argomentazioni **invalide**
      P.es.: «Se è giorno c'è luce, ma è giorno, dunque l'acqua è quieta».

- I primi due argomenti sono **validi** perché conformi alla legge logica del **modus ponendo ponens**.

- Lo **schema inferenziale** di tale legge è il seguente:
  «se il primo, allora il secondo, ma il primo dunque il secondo», corrispondente alla funzione proposizionale sempre **sintatticamente vera**: $\left\langle \left(\left(p \supset q \right) \cdot p \right) \supset q \right\rangle$

- Il terzo argomento è **invalido**, perché **viola una fondamentale legge logica**, il suo **schema inferenziale** è infatti il seguente:

«se il primo, allora il secondo, ma il primo dunque il terzo», corrispondente alla funzione proposizionale: $\langle ((p \supset q) \cdot p) \supset r \rangle$ **certamente falsa** quando «*r*» fosse falsa e l'intero suo antecedente vero, così da violare l'altra legge logica che afferma che «dal vero può essere implicato solo il vero».

- L'insieme delle prescrizioni linguistiche per costruire schemi d'inferenza validi (sintatticamente veri) si definisce **regola logica**.

1.3.4. Passaggio dalla logica formale alla logica simbolica

- Prendiamo le tre espressioni (Malatesta):

1. Il quadrato della somma di due numeri è uguale alla somma del quadrato del primo numero, più il quadrato del secondo numero, più il doppio del prodotto del primo per il secondo.
2. *a* più *b* al quadrato è uguale ad *a* al quadrato più *b* al quadrato, più il doppio prodotto di *a* e *b*.

3. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

- Mentre
  - Gli Stoici non simbolizzavano né le costanti (predicati) né le variabili proposizionali, analogamente a come in (1) non si usano simboli né per le costanti (operatori) né per le variabili numeriche,
  - Aristotele simbolizzava nella sua sillogistica le variabili terminali, ma non le costanti terminali e proposizionali, analogamente a come in (2) si usano simboli per le variabili, ma non per le costanti numeriche,
  - Nella **logica simbolica** si simbolizzano sia le costanti che le variabili, sia terminali che proposizionali.
- Questo passaggio, che caratterizza la logica moderna rispetto a quella classica (greca e scolastica) è stato intuito da Gottfried W. Leibniz (1646-1716), proseguito da George Boole (1815-1864) e Augustus De Morgan (1806-1871) e realizzato nella *Begriffsschrift* (1879) di Gottlob Frege (1848-1925) che unifica logica aristotelica, stoica, scolastica e moderna in un unico grande sistema di logica delle proposizioni con solo sei assiomi.

- I *Begriffsschrift* di Frege, le *Vorlesungen* di algebra della logica di Ernst Schroeder (1841-1902) e le *Formulaire Mathématique* di Giuseppe Pano (1895-1903) in cui il metodo assiomatico di Riemann è esteso dalla geometria all'aritmetica e dunque a tutta la matematica confluiscono nella *summa summarum* della logica e della matematica, i *Principia Mathematica* [PM] (1910-1927[2]) di Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Arthur William Russell (1872-1970).
- Dai PM idea dell'unità profonda di logica formale e matematica → uso di definire l'intera logica simbolica come **logica matematica** → riduzionismo scientista della filosofia analitica degli inizi del '900 di tipo neo–positivista.

1.3.5. Estensione della logica simbolica

- **Effettivamente**, la logica matematica è **solo una parte** della logica simbolica moderna, una parte che include essenzialmente quattro parti:

1. Teoria dei modelli (*model theory*)
2. Teoria degli insiemi (*set theory*)
3. Teoria della ricorsività (*recursion theory*)

4. Teoria della dimostrazione (*proof theory*).

- D’altra parte, la **logica simbolica** include oggi due grandi branche:

1. **Logica simbolica classica** (= logica formale rigorosa), con i seguenti caratteri:
   a. Rigorosamente **bivalente** (= **due soli valori di verità**, V/F)
   b. In essa vale un’unica implicazione (= **implicazione materiale**)
   c. Tutti i connettivi (predicati proposizionali) definibili mediante un unico connettivo (= **disgiunzione esclusiva** “|”).
   d. **Vero-funzionale** (= valore di verità proposizioni molecolari dipende unicamente dal valore di verità delle proposizioni semplici).
   e. Tutte le leggi derivabili da **un solo assioma**
   f. Suoi enunciati assolutamente **atemporali.**

2. **Logiche simboliche non–classiche**

- Si ottengono dalla (1) negando uno o più dei suoi caratteri distintivi. Essenziali per la formalizzazione, sia di linguaggi scientifici particolari (p.es., logica intuizionistica, logica quantistica, logica sfumata (*fuzzy logic*)…), sia di linguaggi non–scientifici o non–matematici → possibilità di simbolizzare **qualsiasi forma di linguaggio** (anche filosofico, teologico, etc.) → approccio **non riduzionista** alla logica simbolica.
- P. es., negando (1a) → **logiche polivalenti** [Ian Łukasiewicz (1878-1956)]:
  → **logica sfumata o fuzzy logic** [Lofti Zadeh]
  → **logica quantistica** [Von Neumann], fondamentale per la meccanica quantistica
- Negando (1c) ed in genere l'interdefinibilità dei connettivi logici → **logica intuizionistica** in matematica che limita l'applicabilità della legge del terzo escluso [Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1898-1966) e Arend Heyting (1898-1980)] e rifiuta, almeno nei suoi primi esponenti, una fondazione formalista della matematica (= riduzione della matematica a sistema formale).

- Negando (1a), (1d) e alcuni altri dei caratteri propri della logica simbolica classica → vari tipi di **logiche modali e/o intensionali** essenziali per la formalizzazione e la simbolizzazione dei linguaggi propri delle **scienze umane** (metafisica, etica, diritto, economia, ma anche estetica, teologia, etc.) → fondamentali per un approccio rigoroso al **dialogo interculturale** nella nostra epoca post-moderna e **globalizzata.**

2. Teoria della predicazione

- La distinzione fra **logica formale** e **ontologia formale** diviene particolarmente evidente quando trattiamo la **teoria della predicazione,** il cuore cioè di:

1. Ogni teoria **logica** — laddove cioè la predicazione è analizzata nei termini di una **relazione di appartenenza "$\in$" a due argomenti,** di un elemento x ad una certa **classe "A"**, ovvero $\in(x,\mathbf{A})$.
   → Quando, p.es., diciamo: "il sangue è rosso", intendiamo semplicemente affermare una particolare realizzazione dello schema predicativo generale "$x\in\mathbf{A}$", nel caso specifico: "il sangue appartiene alla classe degli oggetti rossi"

2. Ogni teoria **ontologica** — laddove cioè la relazione logica di appartenenza è analizzata come ciò che **suppone e denota** una più fondamentale relazione **ontologica** extra-linguistica (mentale e/o naturale) fra due entità caratterizzate da due **modalità di esistenza** distinte, ma complementari:

a. **l’individuo** (denotato dal soggetto logico: **esistenza individuale,** ciò che esiste in sé, e che quindi può essere moltiplicato);

b. **la proprietà o universale** (denotata dal predicato logico: **esistenza nella molteplicità di individui,** come ciò che non esiste in sé, ma che proprio per questo è unico e non moltiplicabile).
→ È chiaro che il **modo di essere dell’individuo** viene modificato dal fatto che gli inerisca una proprietà invece che un’altra (p.es., un conto è essere un uomo “bianco” o “nero”) e complementariamente il **modo di essere della proprietà** è modificato dal fatto di inerire a un certo individuo invece che a un altro (p.es., un conto è “il bianco del cavallo”, un conto è “il bianco dell’uomo”).
→ Problema della **modalità di esistenza degli universali:** solo **convenzioni linguistiche** (nominalismo → logica = ontologia), solo **concetti** (concettualismo) o anche **realtà extramentale** (logicismo, naturalismo)?

- Logica scientifica moderna come la scienza moderna è nata appositamente per **tagliar via metodicamente dalla logica** (e dalla teoria della predicazione in particolare) ogni considerazione ontologica, considerare cioè la predicazione nei termini di una **relazione astratta (appartenenza) fra elementi immutabili astratti (l'elemento e la classe)** → se applicata all'analisi del linguaggio naturale e delle ontologie (p.es., teorie metafisiche) non può che giustificare al massimo un'ontologia **nominalista** (cfr. Quine).

2.1. Logica come analisi del linguaggio [Cfr. GA1, pp. 7ss]

[D'ora in poi si danno per scontate le definizioni delle nozioni fondamentali di logica simbolica e proposizionale del capitolo precedente, in particolare le distinzioni:

linguaggio/metalinguaggio;
formula/proposizione/enunciato/asserto;
connotazione/denotazione;
termine determinante/determinato;
predicato/argomento(i);
predicato terminale/proposizionale;
funzione proposizionale; variabile/costante logica;
predicati (connettivi) proposizionali e loro tavole di verità].

2.1.1. Linguaggi ordinari, simbolici, formali

- **Scopi indagine logica** — da Aristotele fino alla moderna logica matematica — sono sostanzialmente due:

  1. Rendere totalmente **esplicito** il linguaggio (delle teorie, ivi comprese le teorie filosofiche) attraverso il quale si intende parlare di qualcosa e,

  2. Individuare delle **regole** che consentano di stabilire **rapporti di conseguenza logica** tra le proposizioni di tale linguaggio.

- Queste due funzioni della logica si possono esprimere anche dicendo che la logica persegue lo scopo di:

  1. **Formalizzare il linguaggio delle teorie** (in breve di elaborare linguaggi formali) e di

  2. **Fornire insiemi di regole formali** (in breve un **calcolo**) per determinare la relazione di conseguenza logica tra le proposizioni dei linguaggi formali in oggetto.

- **La formalizzazione** delle teorie — ovvero, partendo dal **linguaggio ordinario o naturale (LN),** in cui sono espresse a livello intuitivo, arrivare alla costruzione del **linguaggio formale** proprio della teoria **(L)** —, suppone il passaggio intermedio della costruzione di un appropriato **linguaggio simbolico (LS).**
- **Processo di simbolizzazione.** Consiste di tre passi fondamentali:

1. **Isolamento** delle componenti del linguaggio con **rilevanza logica**;
2. Loro **disambiguamento** e corrispondente loro traduzione in **espressioni strutturate formalmente** e dotate di **significato univoco**;
3. Loro **simbolizzazione** attraverso un **linguaggio simbolico convenzionale, LS**, distinguendo fra simboli del **linguaggio-oggetto** della teoria da formalizzare e simboli del **metalinguaggio** della meta-teoria in cui analizzare la prima.

2.1.2. Linguaggi formali, calcoli formali, sistemi formali

- **Processo di formalizzazione.** La costruzione del linguaggio formale della teoria **L**, consiste di due passi fondamentali, ovvero usando LS:

1. **Determinazione** degli assiomi (= formule a **zero premesse)** necessari e sufficienti a dedurre le proposizioni (teoremi) della teoria, accertando:

   c. Che siano **realmente assiomi** ovvero formule non derivabili da altre più fondamentali.

   d. Che siano in numero **finito.**

   e. Che siano reciprocamente **non-contraddittori.**

2. **Determinazione** delle regole di deduzione <**D**>, appropriate per derivare i teoremi dagli assiomi.

- L'insieme del linguaggio formale e delle regole di deduzione costituiranno un **calcolo CA, CA = <L,D>**, ovvero **un sistema deduttivo simbolizzato e formalizzato**, che sintatticamente si definisce un **sistema formale**.

- → La stessa **teoria logica della dimostrazione**, nelle sue due componenti di **logica delle proposizioni** e **logica dei predicati,** può essere formalizzata nei termini, rispettivamente, di un appropriato **calcolo proposizionale** e di un appropriato **calcolo dei predicati** con una loro **sintassi** e **semantica**.

- Generalmente il metalinguaggio con cui analizzare la **consistenza**, la **correttezza** e la **completezza** di questi due calcoli è un ulteriore linguaggio formale, quello della **teoria degli insiemi.**
- Per passare a introdurre le nozioni fondamentali dei calcoli proposizionali modali e intensionali occorre accennare almeno al **simbolismo** delle nozioni fondamentali sintattiche e semantiche del **calcolo proposizionale** e del **calcolo dei predicati** classici, ovvero **estensionali.**

2.2.Cenni di logica e calcolo proposizionali [BO, cap.3]

- In questo paragrafo reintrodurremo in modo simbolico, semi-formalizzato le **nozioni fondamentali di logica delle proposizioni** e del **calcolo semantico delle proposizioni** (= calcolo vero-funzionale mediante le **tavole di verità**) già usate a livello intuitivo nel capitolo precedente.

2.2.1. Cenni di sintassi

- Nell’analisi logica ogni teoria o insieme di formule considerata come un sistema formale che, sintatticamente, significa un calcolo **CA** costituito da un linguaggio **L** e da un insieme di regole deduttive **D** → **CA = <L,D>**.
  - **L** costituito da un alfabeto **A** e da regole di formazione **F** → **L=<A,F>.**
- Il metalinguaggio della logica delle proposizioni è il calcolo proposizionale classico **k = <Lk,Dk>** con **L=<Ak,Fk>**.
- **Ak** di **k** costituito dai seguenti segni (teorici e metateorici)[1]
  (Sull’uso di questi segni e sulla loro novità rispetto a quelli usati finora, vedi il testo della nota 1 alla fine del documento).

Alfabeto di k (Ak)

Linguaggio	**Metalinguaggio**
a. Variabili proposizionali: p,q,r,…	**a. Metavariabili proposizionali:** α,β,γ,…
b. Costanti proposizionali: non: $\neg$ (~) [NEGAZIONE] e: $\wedge$ (·) [CONGIUNZIONE] o: $\vee$ [DISGIUNZIONE] se…allora: $\rightarrow$ ($\supset$) [IMPLICAZIONE MATERIALE] se e solo se: $\leftrightarrow$ ($\equiv$) [EQUIVALENZA]	**b. Metacostanti proposizionali:** non et vel $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
c. Segni ausiliari: (,)	**c. Segni ausiliari:** (,)

Tavola 2-1

- L’insieme {**Fk**} delle regole di formazione di formule che appartengono all’insieme *X* delle formule ammissibili in **k** è costituito dalle clausole della seguente **definizione induttiva** delle formule per **k,** a partire da formule atomiche (base) verso formule molecolari (passo):
  i. $p,q,r,\ldots$sono formule (atomiche di **k**)
  ii. se α è una formula allora $\neg\alpha$ è una formula
  iii. se α,β sono formule, allora ogni $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$ sono formule
  iv. non ci sono altre formule
  (le clausole ii-iv riguardano le formule molecolari di **k**).

2.2.2. Cenni di semantica

- La semantica s’interessa delle relazioni fra linguaggio e ciò di cui il linguaggio parla → nozione di **interpretazione** mediante cui si attribuisce a ogni variabile proposizionale una **valore di verità** = dire se lo stato di cose espresso da quella variabile è realizato o meno → si attribuisce a quella variabile il valore 1 o 0.

2.2.2.1. Definizioni preliminari

- Interpretazione (I)α:
  - V sia l'insieme delle variabili proposizionali di **k**:

    $$I:V\rightarrow\{0,1\}$$

    I è una funzione che associa ad ogni variabile: *p, q, r,…*un valore di verità: $I(p)=1$, $I(q)=0$, $I(r)=1$, … è un'**interpretazione** o **modello** di quelle variabili.
  - Proprietà di **vero-funzionalità** dei connettivi logici $\neg p, p\wedge q, p\vee q, p\rightarrow q$, $p\leftrightarrow q$: è possibile assegnare univocamente un valore di verità a ciascuna delle proposizioni composte a partire dai soli valori di verità delle proposizioni atomiche componenti, in base alle seguenti **tavole di verità** dei connettivi logici:

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	-	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	-	0	0	1	1

- Oppure in forma più sintetica:

$\neg$	
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

  - Le tavole sintetiche si leggono nel modo seguente: il primo argomento è preso dalla colonna all'estrema sinistra e il secondo argomento dalla prima riga.

2.2.2.2. Tre sensi della disgiunzione "o"

- Ricordiamo che a proposito della **disgiunzione** "*p* o *q*", esistono almeno **tre sensi** diversi di cui bisogna tener conto in logica, ma che spesso dal linguaggio comune **sono confusi**, anche quando lo si usa nei testi di logica per denotarli, e dove dunque fanno fede **solo le tavole di verità** relative per distinguerli[2]. I tre sensi sono:

1. il senso dell'**alternativa** o **somma logica**, che è quello espresso dalla tavola di $p \vee q$ (1110) *falsa solo quando ambedue sono false*, quando cioè non si esclude che le due disgiunte possano darsi insieme (p.es.: "Isidoro è sacerdote o religioso", il senso di "o" è propriamente quello di "e/o", del latino *vel*), esistono almeno altri due sensi:

2. La **disgiuntiva** (0110), *vera solo quando una delle due è vera*, quando cioè si e-sclude che le due disgiunte possano andare insieme e non esiste alcun altra possi-bilità che scegliere una delle due perché una delle due sarà necessariamente vera: è il senso latino dell' *aut aut* (p.es., come quando si dice: "O è giorno, o è notte"), e dove dunque la tavola di verità sarebbe:

p	q	$p \vee_1 q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3. L’**esclusiva** (0111)**,** *falsa solo quando ambedue sono vere*, quando cioè si esclude solo che le due disgiunte possano andare insieme, ma non si esclude la possibilità che si possa non scegliere fra le due, perché esistono altre possibilità e dunque potrebbero essere ambedue false: è il senso latino dell’*aut* (p.es., come quando si dice “Isidoro è cattolico o protestante” che è una disgiunzione che non che Isidoro possa essere nessuna delle due alternative, per esempio buddista o scintoista), e dove dunque la tavola di verità sarebbe:

p	q	$p \vee_2 q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

- Ma è facile dimostrare che la tavola di verità di queste due ulteriori sensi della disgiunzione si riducono a quelle di particolari combinazioni dei primi tre connettivi logici, e cioè:

  1. La tavola di verità per $p \vee_1 q$ si riduce a quella della formula composta $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, ove, appunto si nega, sia che possano essere ambedue false, ovvero $(p \vee q)$, sia che possano essere ambedue vere $\neg(p \wedge q)$ → (0110).

  2. La tavola di verità per $p \vee_2 q$ si riduce a quella della negazione della congiunzione, $\neg(p \wedge q)$. Infatti la tavola della verità di $p \vee_2 q$, (0111), altro non è che la negata della tavola della verità della congiunzione $p \wedge q$ (1000).

2.2.2.3. Tre sensi della condizione "se…allora"

- Abbiamo già visto due sensi della **condizione:** il senso dell'implicazione "materiale" $p \rightarrow q$, dato dalla tavola della verità (1011), ed il senso della doppia implicazione materiale o "equivalenza" $p \leftrightarrow q$ "se e solo se…allora", dato dalla tavola di verità (1001).

- Ciò che distingue anche a prima vista i due sensi è la **simmetricità** della relazione condizionale fra antecedente e conseguente nell'equivalenza, a differenza dell'**asimmetricità** della relazione condizionale nell'implicazione materiale.
- Ovvero: nel caso dell'equivalenza, il senso della proposizione complessa rimane immutato **se scambiamo di posto** alle due proposizioni semplici componenti: l'antecedente e il conseguente.
- P.es., è del tutto equivalente dire, al livello del mare, "se e solo se l'acqua bolle è a cento gradi, allora bolle", oppure "se e solo se l'acqua bolle è a cento gradi". Si tratta dunque di due espressioni dal significato **equivalente**.
- In termini della relazione condizionale che le contraddistingue, si può dire che l'una è **condizione necessaria e sufficiente** dell'altra.
- È chiaro allora che, equivalenza vuol dire simmetricità della relazione condizionale e questa simmetricità vuol dire che, nei due sensi della relazione, l'una è rispetto all'altra condizione necessaria e sufficiente, allora nel caso dell'**asimmetricità** della relazione condizionale dell'implicazione materiale, **l'una è condizione necessaria e l'altra sufficiente** della verità formale dell'implicazione, e quale sia l'una o l'altra

dipende univocamente dal posto che assume nella relazione e che **non può essere in alcun modo invertito**.

- Ora, se riflettiamo un attimo sulla tavola di verità della implicazione materiale (1011), si vede chiaramente che la verità dell'implicazione non dipende mai dalla verità dell'antecedente, viceversa, nel caso in cui l'antecedente sia vera, **necessariamente** per la verità dell'implicazione dovrà essere vera la conseguente.
- Nel simbolismo usato $p \rightarrow q$, dunque, p deve denotare la condizione solo **sufficiente**, q quella **necessaria**, il che va quasi sempre contro il senso comune. P.es., è chiaro a tutti che l'espressione "se ho due monete da cinquanta euro (p), allora ho cento euro (q)", l'antecedente intuitivo corrisponde a quello simbolico. Avere due monete da cinquanta è infatti condizione solo **sufficiente** ad avere cento euro — potrei avere cento euro anche avendo un'altra combinazione di monete, quindi $((\mathbf{0} \rightarrow 1) \equiv 1)$ —, mentre avere cento euro è **necessario**, se ho due monte da cinquanta. Infatti $((1 \rightarrow \mathbf{1}) \equiv 1)$, invece se $((1 \rightarrow \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0})$, mai cioè se ho due monete da cinquanta **non avrò** cento euro.
- Tuttavia, in molti casi, nel linguaggio ordinario si fa confusione. P.es., "se c'è fumo allora c'è fuoco" sarebbe falso simbolizzarlo con $p \rightarrow q$, dove "c'è fumo" $\equiv p$, e "c'è

fuoco”$\equiv q$. Infatti il fuoco è condizione solo **sufficiente** al darsi del fumo (p.es., ci potrebbe essere del ghiaccio secco nell’acqua a produrlo), viceversa se c’è del fuoco è **necessario** che via sia fumo. Quindi la simbolizzazione sarebbe l’altra “c’è fumo” $\equiv q$, e “c’è fuoco”$\equiv p$, $p \rightarrow q$, ovvero “se c’è fuoco allora c’è fumo”.

- Ma non è questo il senso della proposizione del senso comune: “se c’è fumo allora c’è fuoco”. Essa di fatto, allora, esprime un’altra condizione, quella che in contesti normali, esiste un’**equivalenza** fra l’accadere del fumo e l’accadere del fuoco. Si sta cioè dicendo che “solo e solo se c’è fuoco c’è fumo”, e viceversa, quindi la presenza di fumo è *ipso facto* segno di pericolo del fuoco. Perciò la simbolizzazione corretta dell’espressione del senso comune di cui sopra è ($p \leftrightarrow q$), ovvero ($q \leftrightarrow p$).

2.2.3. Definizione formalizzata di una teoria

2.2.3.1. Definizione generale di teoria

- Con teoria T si intende un linguaggio che parla di un certo, limitato, universo di oggetti, ovvero un insieme di proposizioni che, data l’interpretazione I su quell’universo (o interpretazione *standard*), risultano in esse **vere**:

$$T = \{\alpha: I(\alpha)=1\}$$

- P.es., tutte le proposizioni vere dell'**aritmetica elementare** sono considerate l'interpretazione standard I della **teoria dei numeri naturali.**

2.2.3.2. Definizione modellistica di teoria

- In base alla precedente definizione di T esiste il problema di trovare l'insieme delle proposizioni vere che corrispondono a T mediante una procedura finitistica, ovvero, con un numero comunque finito di passi.
- → Necessità di un **assiomatizzazione delle teorie,** di derivare cioè tutte le proposizioni **vere**, α, in una teoria esclusivamente da un insieme **finito** di proposizioni-base privilegiate o **assiomi**, supposti **veri** per quell'universo di oggetti di cui parla la teoria **.** Definizione modellistica di teoria assiomatizzata, $\mathcal{A}$(T), usando la nozione di per sé infinitaria, di **conseguenza logica** $\Vdash$:

$$T = \{\alpha: \mathcal{A}(T) \Vdash \alpha\}$$

Dove con "conseguenza logica" si intende la conseguenza **vera** di un'implicazione che, a differenza dell'implicazione "materiale", può essere implicata solo da premesse a loro volta **vere. “**Vere”, ovviamente, in un contesto limitato, per qualche modello del sistema formale soggiacente, perché siamo nell’ambito dell’argomentazione **ipotetica** e non **apodittica**

- → Definizione di T come **chiusa** rispetto al nesso di conseguenza logica, ovvero ogni proposizione che è una conseguenza logica delle premesse della teoria appartiene alla teoria.
- → Se T fosse anche **completa,** ovvero se fosse vero anche che le sue conseguenze coprono la **totalità** delle proposizioni vere in I, allora la T assiomatizzata coinciderebbe con quella non assiomatizzata.
- I teoremi di Goedel dimostrano invece che la completezza è impossibile, proprio a partire dalla **teoria assiomatizzata della aritmetica elementare.** Essi dimostrano infatti che **non** tutte le proposizioni vere dell’aritmetica elementare sono **decidibili** (dimostrabili) nell’aritmetica **assiomatizzata** (aritmetica di Peano).
- Siccome un precedente teorema di Goedel (**teorema di codifica goedeliana**) che è alla base dell’informatica, dimostra che **qualsiasi linguaggio formalizzato** può essere codificato in termini aritmetici (codifica numerica), i teoremi di incompletezza

di Goedel acquistano valore di **teoremi di limitazione universale** per qualsiasi linguaggio formalizzato o teoria assiomatizzata.

Sommario

Note

[1] N.B.: I segni fra parentesi sono quelli tipici della logica matematica e sono quelli usati finora, perché quelli originari della simbologia di Peano, usati nei *Principia* di Whitehead e Russell e quindi da Bochenski nel nostro manualetto di *Logica I*. Viceversa d'ora in poi useremo altri segni di logica simbolica (p.es., "$\wedge$", invece del segno del "prodotto logico", "$\cdot$", usato finora per denotare il connettivo logico (o predicato proposizionale) *et* della congiunzione logica), perché di uso più generale nella logica simbolica, in particolare nelle sue applicazioni alle scienze umane e non matematiche, che qui ci interessano.

[2] Per esempio, i sensi 2. e 3. che definiamo qui sotto, sono denotati da Galvan, rispettivamente come "esclusiva" e "incompatibile", da Bochensky come "disgiuntiva" ed "esclusiva", creando grande confusione. Praticamente si è d'accordo solo sul senso 1., che quasi tutti convengono a definire come "alternativa" o disgiunzione "non-esclusiva". Per questo, al di là delle parole, fanno fede solo le tavole di verità che rendono assolutamente non-ambigue le definizioni, al di là dei giochi di parole…