

# LOGICA INTENSIONALE

**S. Galvan**

(Università Cattolica Milano)

## LOGICA DEONTICA

### *1. Sistemi deontici puri*

O-KD, O-KD4, O-KD5, O-KD45

## 2. Sistemi aletici di logica deontica

### 2.1 Sintassi

$$\mathbf{L(d)} = \langle \mathbf{A(d)}, \mathbf{F(d)} \rangle.$$

$$\mathbf{A(d)} = \mathbf{A(k)} + \mathbf{Q} \text{ (costante di idealizzazione)} + \Box.$$

$$\mathbf{F(d)} = \text{def. ind. usuale.}$$

$$\text{def.ni : } \mathbf{O}\alpha =_{\text{def.}} \Box(Q \rightarrow \alpha), \mathbf{P}\alpha =_{\text{def.}} \neg \mathbf{O}\neg \alpha$$

$$\mathbf{d} = \langle \mathbf{L(d)}, \mathbf{D(d)} \rangle$$

$$\mathbf{D(d)} = \mathbf{D(k)} + \text{regola } \mathbf{N} + \text{assiomi}$$

a) Regola di necessitazione **N**

b) -Assiomi che regolano il segno  $\Box\alpha$ .

-Assioma specifico **Q** che regola la costante **Q**:  $\Diamond Q$

In dipendenza dalla scelta degli assiomi per  $\square$  si ha:

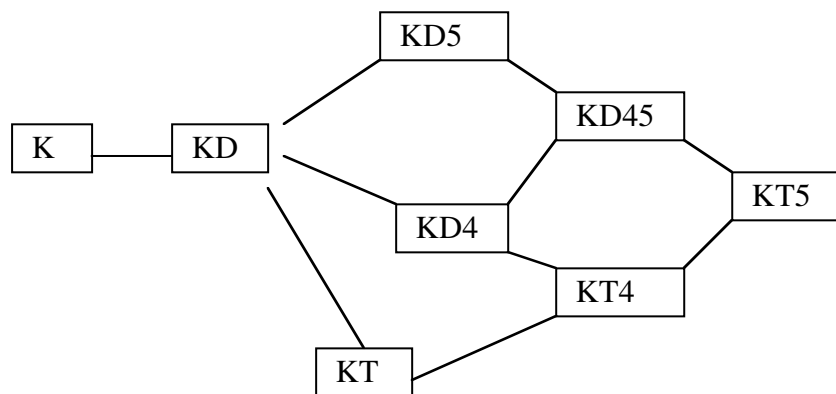
**KQ**: nessuna assioma per  $\square$

**K4Q**: assioma **4** per  $\square$

**K5Q**: assioma **5** per  $\square$

**K45Q**: assioma **4** e **5** per  $\square$

**KT5Q**: assioma **T** e **5** per  $\square$



## 2.2 Semantica

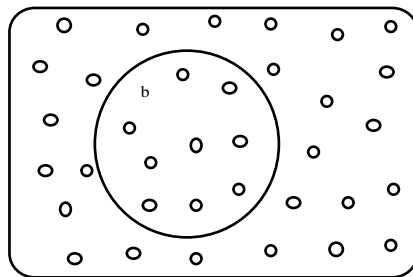
### 2.1 Definizioni preliminari

Def. 1: *b-struttura*  $\langle W, R, b \rangle$

$\langle W, R \rangle$  è una struttura normale

$b$  è un sottinsieme non vuoto di  $W$  (mondi buoni)

Esempio:



Def. 2: *Interpretazione* su  $W$  ( $I$ ): usuale

Def. 3: *b-modello*  $\langle W, R, b, I \rangle$

*Def. 4: Verità in un mondo di un b-modello* ( $\langle W, R, b, I \rangle \models_u \alpha$ )

Base:  $\alpha \equiv p$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u p \Leftrightarrow I(p, u) = 1$

$\alpha \equiv Q$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u Q \Leftrightarrow u \in b$

Passo:  $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \beta$  et  $\langle W, R, b, I \rangle \models_u \gamma$

$\alpha \equiv \beta \vee \gamma$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \beta \vee \gamma \Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \beta$  vel  $\langle W, R, b, I \rangle \models_u \gamma$

$\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow (\langle W, R, b, I \rangle \models_u \beta \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \gamma)$

$\alpha \equiv \neg \beta$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \neg \beta \Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \not\models_u \beta$

$\alpha \equiv \Box \beta$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \Box \beta \Leftrightarrow (\text{om } v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta)$

Nota: *verità di una obbligazione*

$$\begin{aligned}
 \langle W, R, b, I \rangle \models_u O\beta &\Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \Box(Q \rightarrow \beta) && \text{def. O} \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v Q \rightarrow \beta) && \text{def. } \models \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } v)(u R v \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v Q \\
 &\quad \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) && \text{def. } \models \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } v)(u R v \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v Q \\
 &\quad \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) && E \Rightarrow \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } v)(u R v \text{ et } v \in b \\
 &\quad \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) && \text{def. } \models
 \end{aligned}$$

Similmente: *verità di un permesso*

$$\langle W, R, b, I \rangle \models_u P\beta \Leftrightarrow (\text{ex } v)(u R v \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) \quad \text{def. P}$$

*Def. 5: b-serialità* di R

$$\text{b-seriale } R \Leftrightarrow (\text{om } u)(\text{ex } v)(u R v \text{ et } v \in b)$$

*Def. ni: altre definizioni* si ottengono per estensione

## 2.2 Correttezza e teoremi di caratterizzazione

- Correttezza di KQ rispetto a modelli basati su b-strutture

Dem:  $\Vdash_{R \text{ b-ser}} \Diamond Q$ . Quindi:

$(\text{om } \langle W, R, b \rangle \text{ con } R \text{ b-seriale})(\text{om } I)(\text{om } u)(\langle W, R, b, I \rangle \models_u \Diamond Q)$

def.  $\Vdash_{R \text{ b-ser}}$

$R \text{ b-ser} \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \Diamond Q$

per Eom

↓

H:  $R \text{ b-ser}$

Dem:  $\langle W, R, b, I \rangle \models_u \Diamond Q$

Dimostrazione:

$\langle W, R, b, I \rangle \not\models_u \Diamond Q$

Ipotesi per assurdo

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \Box \neg Q$

def.  $\models$  e  $\Diamond$

$(\text{om } v)(uRv \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \not\models_v Q)$

def.  $\models$

$\text{non}(\text{ex } v)(uRv \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v Q)$

logica

$\text{non}(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$

def.  $\models$

$(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$

per b-serialità di  $R$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \Diamond Q$

(non k) e def.  $\models$

- risultati generali

$$\begin{aligned} X \vdash_{\text{KQ}} \alpha &\Leftrightarrow X \Vdash_{\text{KQ}} \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{om } \langle W, R \rangle \text{ con } R \text{ b-seriale})(X \Vdash_{\langle W, R \rangle} \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \vdash_{\text{K4Q}} \alpha &\Leftrightarrow X \Vdash_{\text{K4Q}} \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{om } \langle W, R \rangle \text{ con } R \text{ b-seriale e trans})(X \Vdash_{\langle W, R \rangle} \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \vdash_{\text{K5Q}} \alpha &\Leftrightarrow X \Vdash_{\text{K5Q}} \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{om } \langle W, R \rangle \text{ con } R \text{ b-seriale e eucl})(X \Vdash_{\langle W, R \rangle} \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \vdash_{\text{KT5Q}} \alpha &\Leftrightarrow X \Vdash_{\text{KT5Q}} \alpha \\ &\Leftrightarrow (\text{om } \langle W, R \rangle \text{ con } R \text{ b-seriale, rifl e eucl})(X \Vdash_{\langle W, R \rangle} \alpha) \end{aligned}$$

## 2.3 Rapporti con i sistemi deontici puri

*Def. di funzione di traduzione* dal linguaggio di O-KD (linguaggio di un sistema puro) a quello di KQ (linguaggio di un sistema aleatico):

$\Phi p \equiv p$ ;  $\Phi(\neg\alpha) \equiv \neg\Phi\alpha$ ;  $\Phi(\alpha \bullet \beta) \equiv \Phi\alpha \bullet \Phi\beta$  (ove  $\bullet$  sta per un qualsiasi connettivo biargomentale);  $\Phi(O\alpha) \equiv \Box(Q \rightarrow \Phi\alpha)$

Allora risulta, ponendo  $c_1 \Leftrightarrow_{\Phi} O-c_2 \Leftrightarrow \vdash_{O-c_2} \alpha \Leftrightarrow \vdash_{c_2} \Phi\alpha$

Sistemi deontici		Sistemi aleatici
O-KD	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	KQ
O-KD4	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	K4Q
O-KD5	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	K5Q
O-KD45	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	KT5Q

**Teorema:**  $O\text{-KD} \Leftrightarrow_{\Phi} KQ$

**1. verso:**  $\Rightarrow$  (dimostrazione sintattica)

*Base:* caso interessante costituito da  $O\text{-KD}$

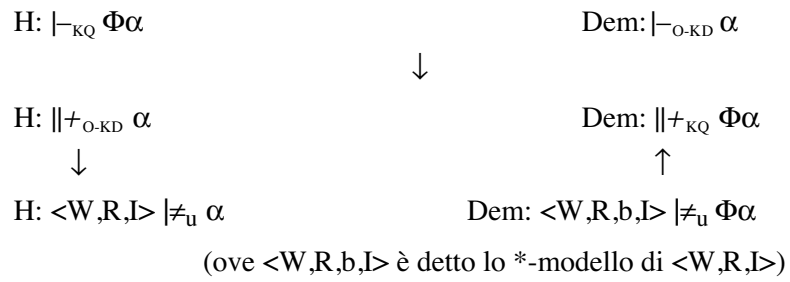
*Dem:*  $\Phi(O\alpha) \vdash_{KQ} \Phi(P\alpha)$ .

*Dimostrazione:*

$Q \rightarrow \Phi\alpha$	$Q \vdash_{KQ} \Phi\alpha$	A, MP
$Q \rightarrow \Phi\alpha$	$Q \vdash_{KQ} Q \wedge \Phi\alpha$	A, $I_{\wedge}$
$Q \rightarrow \Phi\alpha$	$\neg(Q \wedge \Phi\alpha) \vdash_{KQ} \neg Q$	C
$\Box(Q \rightarrow \Phi\alpha)$	$\Box\neg(Q \wedge \Phi\alpha) \vdash_{KQ} \Box\neg Q$	N
$\Box(Q \rightarrow \Phi\alpha)$	$\Diamond Q \vdash_{KQ} \Diamond(Q \wedge \Phi\alpha)$	C, def. $\Diamond$
$\Box(Q \rightarrow \Phi\alpha)$	$\vdash_{KQ} \Diamond(Q \wedge \Phi\alpha)$	per Q
$\Phi(O\alpha)$	$\vdash_{KQ} \Phi(P\alpha)$	def. $\Phi$

*Passo:* Presenta interesse solo il caso in cui la sequenza derivata è ottenuta per **O-N**. La dimostrazione è analoga a sopra.

2. verso:  $\Leftarrow$  (dimostrazione semantica)



*Dimostrazione:*

a) Costruzione dello \*-modello di  $\langle W, R, I \rangle$

$b = \{v \in W : (\exists x u)(uRv)\}$  (buono = accessibile)

**Lemma 1:**  $\langle W, R, b, I \rangle$  è un b-modello con R b-seriale.

*Dimostrazione:*

$uRv$	a
$v \in b$	def. b
$uRv \text{ et } v \in b$	Iet
$(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$	Iex
$uRv \Rightarrow (\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$	s
$(\text{ex } v)(uRv) \Rightarrow (\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$	exI
$(\text{om } u)((\text{ex } v)(uRv) \Rightarrow (\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b))$	Iom
$(\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv) \Rightarrow (\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$	Distr om $\Rightarrow$
$(\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv)$	R ser
$(\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$	mp

**Lemma 2:**  $uRv \Leftrightarrow uRv \text{ et } v \in b$ . Immediato da sopra.

**Lemma 3:**

$$(\text{om } \alpha \in L(\text{O-KD}))(\langle W, R, I \rangle \models_u \alpha \Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \Phi(\alpha))$$

*Base:*  $\alpha \equiv p$

$\langle W, R, I \rangle \models_u p \Leftrightarrow I(p, u) = 1$	def. $\models$
$\Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u p$	def. $\langle W, R, b, I \rangle$
$\Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \Phi p$	def. $\Phi$

*Passo:*  $\alpha \equiv O\beta$  (unico caso interessante)

$$\begin{aligned}
\langle W, R, I \rangle \models_u O\beta &\Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta) && \text{def. } \models \\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \text{ et } v \in b \Rightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \beta) && \text{per L2} \\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \text{ et } v \in b \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \Phi\beta) && \text{per Hi} \\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v Q \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \Phi\beta) && \text{def. } \models \\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \Rightarrow (\langle W, R, b, I \rangle \models_v Q \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \Phi\beta)) && \text{I} \Rightarrow \\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v Q \rightarrow \\
&\quad \rightarrow \Phi\beta) && \text{def. } \models \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \Box(Q \rightarrow \Phi\beta) && \text{def. } \models \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u \Phi(O\beta) && \text{def. } \Phi
\end{aligned}$$

Ora, il dimostrandum:  $\langle W, R, b, I \rangle \not\models_u \Phi\alpha$  si ottiene da H:  $\langle W, R, I \rangle \not\models_u \alpha$  e L3 per contrapposizione.

NB: il precedente teorema si può estendere agli altri calcoli.

### *3. Sistemi misti di logica deontica*

#### **3.1 Sintassi**

$$\mathbf{L}(\mathbf{d}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{d}), \mathbf{F}(\mathbf{d}) \rangle.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}) = \mathbf{A}(\mathbf{k}) + \square + \mathbf{O}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{d}) = \text{def. ind. usuale. Def.ni usuali}$

$$\mathbf{d} = \langle \mathbf{L}(\mathbf{d}), \mathbf{D}(\mathbf{d}) \rangle$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{d}) = \mathbf{D}(\mathbf{k}) +$$

- a) regole ed assiomi che regolano  $\mathbf{O}$  e  $\square$  separatamente
- b) principi-ponte

#### **3.2 Semantica dei sistemi misti**

- a) Struttura complessa  $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S} \rangle$
- b) Le altre nozioni si ottengono per estensione

### 3.3 Il sistema KT5-O-KD-O□O-□O (in breve K-□O)

Regole ed assiomi:

$D(K-\square O) = D(KT5) + D(O-KD) + \text{Assiomi-ponte } O\square O \text{ e } \square O$ :

$O\square O = O\alpha \rightarrow \square O\alpha$  (necessitazione degli obblighi)

$\square O = \square\alpha \rightarrow O\alpha$  (assioma hintikkiano)

Teoremi:

1) Assioma O-4:  $O\alpha \vdash_{K-\square O} O O\alpha$

Dimostrazione:

$O\alpha \vdash \square O\alpha$

da  $O\square O$

$\square O\alpha \vdash O O\alpha$

da  $\square O$

$O\alpha \vdash O O\alpha$

KS

2) Assioma O-5:  $P\alpha \vdash_{K-\Box} OP\alpha$

$O\neg\alpha \vdash \Box O\neg\alpha$	da $O\Box O$
$\Diamond O\neg\alpha \vdash \Diamond \Box O\neg\alpha$	P
$\Diamond\neg O\neg\alpha \vdash \Box \Diamond\neg O\neg\alpha$	da 5
$\Diamond \Box O\neg\alpha \vdash \Box O\neg\alpha$	C
$\Diamond O\neg\alpha \vdash \Box O\neg\alpha$	KS
$\Diamond O\neg\alpha \vdash O\neg\alpha$	per T
$P\alpha \vdash \Box P\alpha$	per C e def.ni P e $\Diamond$
$P\alpha \vdash OP\alpha$	per $\Box O$

3) Assioma O $\Diamond$ :  $O\alpha \vdash_{K-\Box} \Diamond\alpha$

$\Box\neg\alpha \vdash O\neg\alpha$	da $\Box O$
$P\alpha \vdash \Diamond\alpha$	per C e def.ni P e $\Diamond$
$O\alpha \vdash P\alpha$	da O-D
$O\alpha \vdash \Diamond\alpha$	KS

Equivalenza tra  $K-\Box O$  e  $KT5Q$

La funzione di traduzione  $\Phi$  sia estesa, ponendo  $\Phi_{\Box} = \Phi + \Phi(\Box\alpha) = \Box\Phi\alpha$ . Allora si ha:

$$\vdash_{KT5Q} \Phi\alpha \Leftrightarrow \vdash_{K-\Box O} \alpha$$

In sintesi:

Sistemi deontici		Sistemi aleatici		Sistemi misti
O-KD	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	KQ		
O-KD4	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	K4Q		
O-KD5	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	K5Q		
O-KD45	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	KT5Q	$\Leftrightarrow_{\Phi_{\Box}}$	KT5-O-KD-O $\Box$ O- $\Box$ O

**3.4 Rapporto tra i principi**  $O\Diamond$  (assioma kantiano),  $\Box O$  (assioma hintikkiano) e  $O\Box O$  (principio di necessitazione degli obblighi)

1) In tutte le logiche normali:

$$\Box O \Leftrightarrow MF (O\alpha \wedge \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow O\beta)$$

1. Verso:  $\Rightarrow$

$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash O(\alpha \rightarrow \beta)$	A, $\Box O$
$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash O\alpha \rightarrow O\beta$	DistrO
$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \wedge O\alpha \vdash O\beta$	$E \rightarrow, \wedge I$

2. Verso:  $\Leftarrow$

$OT \quad \Box(T \rightarrow \alpha) \vdash O\alpha$	da MF
$\vdash OT$	def. T, O-N
$\Box(T \rightarrow \alpha) \vdash O\alpha$	KS
$\alpha \vdash T \rightarrow \alpha$	PI
$\Box\alpha \vdash \Box(T \rightarrow \alpha)$	N
$\Box\alpha \vdash O\alpha$	KS

2) In tutte le logiche normali:

$$O\Diamond \Rightarrow O-D$$

$O\perp \vdash \Diamond\perp$	da $O\Diamond$
$O\perp \vdash \neg\Box T$	def. $\perp$
$\Box T \vdash \neg O\perp$	C
$\vdash \Box T$	def. T e N
$\vdash \neg O\perp$	KS
$\vdash \neg O(\alpha \wedge \neg\alpha)$	def. $\perp$
$O\alpha \wedge O\neg\alpha \vdash O(\alpha \wedge \neg\alpha)$	A, I $\wedge$ , O-N, $\wedge$ I
$\neg O(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash \neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$	C
$\vdash \neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$	KS
$\vdash O\alpha \rightarrow P\alpha$	Tr $\wedge\rightarrow$

3) In tutte le logiche normali:

$$\Box O \wedge O-D \Rightarrow O\Diamond$$

$$\Box\neg\alpha \vdash O\neg\alpha$$

$$O\neg\alpha \vdash \neg O\alpha$$

$$\Box\neg\alpha \vdash \neg O\alpha$$

$$O\alpha \vdash \Diamond\alpha$$

da  $\Box O$

da O-D

KS

C