LOGICA INTENSIONALE

S. Galvan

(Università Cattolica Milano)

LOGICA DEONTICA E LH

Formule ontiche e deontiche

Sia dato il linguaggio di un sistema aletico o misto di logica deontica. Allora:

Def. 1: **Formula ontica**

a. $\alpha \in ONN \Leftrightarrow \alpha \in L$ non modale $(p, q, r, \ldots \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$

b. $\alpha \in ON \Leftrightarrow \alpha \in L$ modale $(p, q, r, \ldots \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box)$

Def. 2: **Obbligo elementare/Permesso elementare**

$\alpha \in ON \Rightarrow O\alpha$ è un obbligo elementare

$\alpha \in ON \Rightarrow P\alpha$ è un permesso elementare

Def. 3 : **Formula deontica** ($\alpha \in DON$)

Base: (per ogni obbligo elementare $O\alpha$)($O\alpha \in DON$)

Passo: $\alpha \in DON \Rightarrow \neg\alpha, \Box\alpha, O\alpha \in DON$

$\alpha \in DON$ e $\beta \in DON \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta$,

$\alpha \rightarrow \beta \in DON$

1. Formulazione della legge di Hume

Teorema: α sia una formula DON, X sia un insieme consistente (rispetto al calcolo proposizionale classico) di formule ONN, C sia uno qualsiasi dei calcoli deontici puri o aletici. Allora: $\nvdash_{C}\ \alpha \Rightarrow X \nvdash_{C} \alpha$.

Dimostrazione (per KQ)**:**

Struttura della derivazione

k-Cons X $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\nvdash_{KQ}\ \alpha$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

I $\models$ X $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\nVdash_{R\ \textit{b-ser}}\ \alpha$

$\downarrow$

$\searrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\langle W',R',b',I'\rangle \not\models_j \alpha$

$\searrow \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow$

$\langle W,R,b,I\rangle$

$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$

$\langle W,R,b,I\rangle \models_i X \qquad\qquad\qquad\qquad \langle W,R,b,I\rangle \not\models_i \alpha$

Costruzione di <W,R,b,I>

$W = W' \cup \{i\}$

$R = xRv \Leftrightarrow xR'v$ (ove $x \in W'$ e $v \in W$)

$iRv \Leftrightarrow jR'v$

$b = b'$ ($v \in b \Leftrightarrow v \in b'$)

I: $I(p,x) = I'(p,x)$

$I(p,i) = I(p)$

Lemma 1: <W,R,b,I> è un modello per KQ. Infatti R è b-seriale, cioè (om u)(ex v)(uRv e v∈b)

Lemma 2: $(\text{om } \alpha)(\langle W,R,b,I\rangle \models_x \alpha \Leftrightarrow \langle W',R',b',I'\rangle \models_x \alpha$

Base: $\alpha \equiv p$

$\langle W,R,b,I\rangle \models_x p \Leftrightarrow I(p,x) = 1$ def. $\models$

$\Leftrightarrow I'(p,x) = 1$ def. I

$\Leftrightarrow \langle W',R',b',I'\rangle \models_x p$ def. $\models$

$\alpha \equiv Q$

$\langle W,R,b,I\rangle \models_x Q \Leftrightarrow x \in b$ def. $\models$

$\Leftrightarrow x \in b'$ def. b

$\Leftrightarrow \langle W',R',b',I'\rangle \models_x Q$ def. $\models$

Passo: $\alpha \equiv \Box\beta$

$\langle W,R,b,I\rangle \models_x \Box\beta \Leftrightarrow (\text{om } v)(xRv \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v \beta)$ def. $\models$

$\Leftrightarrow (\text{om } v)(xR'v \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v \beta)$ def. R

$\Leftrightarrow (\text{om } y)(xR'y \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_y \beta)$ def.y

$\Leftrightarrow (\text{om } y)(xR'y \Rightarrow \langle W',R',b',I'\rangle \models_y \beta)$ per Hi

$\Leftrightarrow \langle W',R',b',I'\rangle \models_x \Box\beta$ def. $\models$

Lemma 3: $(\text{om } \alpha \in \text{DON}))(<W,R,b,I> \models_i \alpha \Leftrightarrow <W',R',b',I'> \models_j \alpha)$

Base: $\alpha \equiv \Box(Q \to \beta)$

$<W,R,b,I> \models_i \Box(Q \to \beta) \Leftrightarrow (\text{om } v)(iRv \text{ et } v \in b \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v \beta)$ def. $\models$

$\Leftrightarrow (\text{om } v)(jR'v \text{ et } v \in b' \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v \beta)$ def. y, R,b

$\Leftrightarrow (\text{om } y)(jR'y \text{ et } y \in b' \Rightarrow <W,R,b,I> \models_y \beta)$ def. y

$\Leftrightarrow (\text{om } y)(jR'y \text{ et } y \in b' \Rightarrow <W',R',b',I'> \models_y \beta)$ L2

$\Leftrightarrow <W',R',b',I'> \models_y \Box(Q \to \beta))$ per def. $\models$

Passo: usuale

Lemma 4: $(\text{om } \alpha \in \text{ONN})(<W,R,b,I> \models_i \alpha \Leftrightarrow I \models \alpha)$. Immediato.

Conclusione:

$<W,R,b,I> \models_i X$ $\qquad$ $<W,R,b,I> \not\models_i \alpha$

$\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$

L4 $\qquad$ L3

2. Formulazione della legge di Hume

Teorema: β sia una formula ON, X sia un insieme consistente (rispetto al calcolo KT5) di formule ON, K-❒O sia il sistema misto KT5-O-KD-O❒O-❒O. Allora: $X \vdash_{K\text{-}\square O} O\beta \Rightarrow X \vdash_{KT5} \square\beta$.

Dimostrazione:

Data la equivalenza tra K-❒O e KT5Q la dimostrazione si può condurre anche nella maniera seguente:

Struttura della derivazione

H: $X \vdash_{KT5Q} O\beta$ Dem: $X \vdash_{KT5} \square\beta$

$\downarrow$

$X \nvdash_{KT5} \square\beta$ Dem: $X \nvdash_{KT5Q} O\beta$

Sviluppo:

$X \nVdash_{KT5} \Box\beta$		Caratterizzazione
(ex $<W,R>$ per KT5)(ex I)(ex u)($<W,R,I> \models_u X$ e $<W,R,I> \not\models_u \Box\beta$		
		Def. $\Vdash$
$<W',R',I'> \models_u X$,	*	Eex
$<W',R',I'> \not\models_u \Box\beta$		Eex
$<W',R',I'> \models_u \neg\Box\beta$		def. $\models$
$<W',R',I'> \models_u \Diamond\neg\beta$		def. $\Diamond$
(ex v)(u R'v et $<W',R',I'> \models_v \neg\beta$)		def. $\models$
u R'v et $<W',R',I'> \models_v \neg\beta$	**	Eex

Ora, la struttura $<W',R'>$ è costituita da classi di equivalenza di mondi relati tra di loro: u si trova in una di queste classi. Si ponga:

W = classe di equivalenza in cui esiste u

R = restrizione di R' a W

b = {v} (il mondo in cui è vero $\neg\beta$)

I = restrizione di I' a W

Si ha allora:

Lemma 1: $<W,R,b,I>$ è un modello per KT5Q

La dimostrazione segue dal fatto che R è b-seriale in quanto (om u)(ex v)(uRv et $v \in b$). Le proprietà formali di R e di I sono ereditate da quelle di R' e I'.

Lemma 2:

(om $\alpha \in$ ON)(om $v \in$ W)($<W,R,b,I> \models_v \alpha \Leftrightarrow <W',R',I'> \models_v \alpha$)

La dimostrazione segue dal fatto che i modelli coincidono rispetto alla parte aletica.

Pertanto, la dimostrazione del teorema prosegue nella maniera seguente:

$<W,R,b,I> \models_u X$	♠	da * per L2
uRv et $v \in b$ et $<W,R,b,I> \models_v \neg\beta$		da ** per L2 e def. b
(ex v)(uRv et $v \in b$ et $<W,R,b,I> \models_v \neg\beta$)		Iex
$<W,R,b,I> \models_u P\neg\beta$		def. $\models$
$<W,R,b,I> \not\models_u O\beta$	♠♠	TrPO
(ex $<W,R,b>$ per KT5Q)(ex I)(ex u)($<W,R,I> \models_u X$ e $<W,R,I>$ $\not\models_u O\beta$)		Iex da ♠ e ♠♠ e L1
$X \Vdash\!\!\!\!/_{KT5Q} O\beta$		def. X $\Vdash$
$X \nvdash_{KT5Q} O\beta$		per caratterizzazione

Dimostrazione alternativa:

Data la equivalenza tra K-❐O e KT5Q la dimostrazione si può condurre anche nella maniera seguente:

Struttura della derivazione:

H: X $|\!-_{KT5Q}$ Oβ Dem: X $|\!-_{KT5}$ ❐β

Sviluppo:

X $|\!\not-_{KT5}$ ❐β		Ha
X $||\!\not-_{KT5}$ ❐β		Caratterizzazione

(ex <W,R> per KT5)(ex I)(ex u)(<W,R,I> $|=_u$ X e <W,R,I> $|\neq_u$ ❐β

		Def. $||\!-$
<W,R,I> $|=_u$ X	*	Ex
<W,R,I> $|\neq_u$ ❐β	**	Eex

Ora, si trasformi <W,R,I> in un b-modello ponendo b = W. Vale allora:

Lemma 1: $<W,R,b,I>$ è un modello per KT5Q

La dimostrazione segue dal fatto che R è b-seriale in quanto (om u)(ex v)(uRv et $v \in b$).

Lemma 2:

(om $\alpha \in$ ON)(om v)($<W,R,b,I> \models_v \alpha \Leftrightarrow <W,R,I> \models_v \alpha$)

Per coincidenza rispetto alla parte aletica.

Pertanto:

(om)(<W,R,b> per KT5Q)(om I)(om u)($<W,R,b,I> \models_u X \Rightarrow$

$<W,R,b,I> \models_u O\beta$. da H

$<W,R,b,I> \models_u X \Rightarrow <W,R,b,I> \models_u O\beta$ per Eom e L1

Ora:

$<W,R,b,I> \models_u X$. da * per L2

$<W,R,b,I> \models_u O\beta$ mp

ma allora:

$<W,R,b,I> \models_u \Box\beta$ per def. di b

$<W,R,I> \models_u \Box\beta$ per L2

il che contrasta con **. Pertanto:

$X \vdash_{KT5} \Box\beta$ (non k)

3. Formulazione della legge di Hume

Teorema: β sia una formula ON, X sia un insieme consistente (rispetto al calcolo KT5) di formule ON, K-❐O sia il sistema misto KT5-O-KD-O❐O-❐O. Allora: $X \vdash_{K\text{-}\square O} P\beta \Rightarrow X \vdash_{KT5} \square\beta$.

Dimostrazione:

Data la equivalenza tra K-❐O e KT5Q la dimostrazione si può condurre anche nella maniera seguente:

Struttura della derivazione:

H: $X \vdash_{KT5Q} P\beta$		Dem: $X \vdash_{KT5} \square\beta$
	$\downarrow$	
$X \nvdash_{KT5} \square\beta$		Dem: $X \nvdash_{KT5Q} P\beta$

Sviluppo:

$X \not\Vdash_{KT5} \Box\beta$		Caratterizzazione
(ex $\langle W,R\rangle$ per KT5)(ex I)(ex u)($\langle W,R,I\rangle \models_u X$ e $\langle W,R,I\rangle \not\models_u \Box\beta$		
		Def. $\Vdash$
$\langle W',R',I'\rangle \models_u X$	*	Eex
$\langle W',R',I'\rangle \not\models_u \Box\beta$		Eex
$\langle W',R',I'\rangle \models_u \neg\Box\beta$		def. $\models$
$\langle W',R',I'\rangle \models_u \Diamond\neg\beta$		def. $\Diamond$
(ex v)(uR'v et $\langle W',R',I'\rangle \models_v \neg\beta$)		def. $\models$
uR'v et $\langle W',R',I'\rangle \models_v \neg\beta$	**	Eex

Ora, la struttura $\langle W',R'\rangle$ è costituita da classi di equivalenza di mondi relati tra di loro: u si trova in una di queste classi. Si ponga:

W = classe di equivalenza in cui esiste u

R = restrizione di R' a W

b = {v} (il mondo in cui è vero $\neg\beta$)

I = restrizione di I' a W

Si ha allora:

Lemma 1: $<W,R,b,I>$ è un modello per KT5Q

La dimostrazione segue dal fatto che R è b-seriale in quanto (om u)(ex v)(uRv et $v \in b$). Le proprietà formali di R e di I sono ereditate da quelle di R' e I'.

Lemma 2:

(om $\alpha \in$ ON)(om $v \in$ W)($<W,R,b,I> \models_v \alpha \Leftrightarrow <W',R',I'> \models_v \alpha$)

La dimostrazione segue dalla coincidenza dei modelli rispetto alla parte aletica.

Pertanto, la dimostrazione del teorema prosegue nella maniera seguente:

$<W,R,b,I> \models_u X$	♠	da * per L2
uRv et $v \in b$ et $<W,R,b,I> \models_v \neg\beta$		da ** per L2 e def. b

D'altra parte b è l'insieme unico di v. Pertanto:

non(ex v)(uRv et $v \in b$ et $<W,R,b,I> \models_v \beta$)		per b ={v}

Ma allora:

$<W,R,b,I> \not\models_u P\beta$	♠♠	def. $\models$
(ex $<W,R,b>$ per KT5Q)(ex I)(ex u)($<W,R,I> \models_u X$ et $<W,R,I> \not\models_u P\beta$)		Iex da ♠ e ♠♠ e L1
$X \not\Vdash_{KT5Q} P\beta$		def. X $\Vdash$
$X \nvdash_{KT5Q} P\beta$		per caratterizzazione

NOTA: È da notare l'essenzialità del fatto che si tratti d'obblighi o permessi elementari. Controprova:

1. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{K\text{-}\Box O} O(O\alpha \rightarrow \beta)$

2. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \not\vdash_{K\text{-}\Box O} \Box(O\alpha \rightarrow \beta)$

ad 2. segue dal fatto che $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \not\models_{K\text{-}\Box O} \Box(O\alpha \rightarrow \beta)$. È infatti possibile esibire un contromodello che verifica l'antecedente e falsifica il conseguente. Si lascia la dimostrazione come esercizio.

ad 1.

$\Box(\alpha\rightarrow\beta) \vdash_{K\text{-}\Box O} O\alpha\rightarrow O\beta$	A, $\Box$O, DistrO
$O\alpha\rightarrow O\beta \; O\beta\rightarrow\beta \vdash_{K\text{-}\Box O} O\alpha\rightarrow\beta$	per MP
$\Box(\alpha\rightarrow\beta) \; O\beta\rightarrow\beta \vdash_{K\text{-}\Box O} O\alpha\rightarrow\beta$	KS
$O\Box(\alpha\rightarrow\beta) \; O(O\beta\rightarrow\beta) \vdash_{K\text{-}\Box O} O(O\alpha\rightarrow\beta)$	O-N
$\vdash_{K\text{-}\Box O} O(O\beta\rightarrow\beta)$	Tesi di K-$\Box$O
$O\Box(\alpha\rightarrow\beta) \vdash_{K\text{-}\Box O} O(O\alpha\rightarrow\beta)$	O-N

D'altra parte:

$\Box(\alpha\rightarrow\beta) \vdash_{K\text{-}\Box O} O\Box(\alpha\rightarrow\beta)$ perché

$\Box\Box\alpha \vdash_{K\text{-}\Box O} \Box\Box\alpha$	A
$\Box\Box\alpha \vdash_{K\text{-}\Box O} O\Box\alpha$	per $\Box$O
$\Box\alpha \vdash_{K\text{-}\Box O} O\Box\alpha$	per A4

per cui:

$\Box(\alpha\rightarrow\beta) \vdash_{K\text{-}\Box O} O(O\alpha\rightarrow\beta)$	KS