

# Fisica II anno: Appunti

Rodolfo Guzzi

December 4, 2005

# Contents

<b>1</b>	<b>Termodinamica</b>	<b>4</b>
1.1	La pressione di un gas . . . . .	4
1.2	I principi della meccanica statistica . . . . .	6
1.2.1	I calori specifici e il fallimento della fisica classica . . . . .	8
1.2.2	Il moto Browniano . . . . .	9
1.3	Le leggi della Termodinamica . . . . .	10
<b>2</b>	<b>La relatività Speciale</b>	<b>13</b>
2.1	Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	14
2.2	Trasformazioni di tempo . . . . .	15
2.3	Dinamica relativistica e equivalenza di energia e massa . . . . .	16
2.4	Le implicazioni dello spazio tempo . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Il comportamento quantistico</b>	<b>18</b>
3.1	Osservando gli elettroni . . . . .	19
3.2	Il principio di indeterminazione . . . . .	19
3.3	Conseguenze di natura filosofica . . . . .	22
3.4	Le ampiezza di probabilità . . . . .	22

---

---

3.5	Particelle identiche . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Equazione di Schroedinger</b>	<b>27</b>
4.1	Descrizione fisica dell'equazione di Schroedinger . . . . .	30
4.2	I livelli energetici quantizzati . . . . .	32
4.3	Conclusioni . . . . .	33

# Chapter 1

## Termodinamica

La termodinamica è la scienza che si occupa di capire quale è la interdipendenza tra le proprietà di una sostanza ed il modo con cui questa si scalda o si raffredda e come queste proprietà possano essere dedotte comprendendo il meccanismo che sta alla base.

La prima cosa che si può fare è quello di vedere come sono le proprietà di un gas da un punto di vista Newtoniano.

### 1.1 La pressione di un gas

Immaginiamo di avere un gas in una scatola ad un estremo della quale vi è un pistone che è possibile muovere e che non è soggetto ad alcuna frizione. Immaginiamo ancora che all'esterno del pistone ci sia il vuoto. Ne consegue che ogni volta che gli atomi del gas urtano il pistone questi raccoglierebbe una piccola quantità di moto e che alla fine verrebbe spinto fuori della scatola. Allora per impedire che ciò accada è necessario trattenerlo con una forza applicata all'area del pistone. Definiremo quindi pressione il rapporto tra la forza e l'area. Un modo alternativo è quello di trattare il fenomeno come se fosse dovuto al lavoro differenziale fatto comprimendo il gas muovendo il pistone di una quantità minima. In tal caso avremo il prodotto di una forza per uno spostamento che è equivalente al prodotto di una pressione per una variazione negativa di volume.

In questo modo ci rendiamo conto che se lasciamo libero il pistone, ad ogni collisione molecolare tra gas e pistone il pistone comincerà a muoversi. Per impedirgli di muovere dobbiamo cedergli dall'esterno la stessa quantità di moto nell'unità di tempo mediante la nostra forza. Così vediamo che la forza è uguale alla quantità di moto al secondo comunicata al pistone dalle collisioni delle molecole.

Si tratta quindi di calcolare la quantità di moto comunicata al pistone dall'urto di un atomo. Poi moltiplicheremo per il numero di collisioni al secondo che gli atomi hanno con la parete del pistone. Inoltre dovremo immaginare che il pistone sia un perfetto riflettore, cioè non si

scaldi, per effetto degli urti, perchè in tal caso l'intera teoria non regge più. Diremo che, nel nostro caso, ogni particella che arriva riparte con la stessa energia. Quindi se una particella arriva con una velocità si allontana con la stessa velocità e massa avremo una particella entrante ed una uscente. Ora sapendo che la particella viene riflessa, la quantità di moto complessiva comunicata dal pistone alla particella è il doppio della quantità di moto. Vediamo ora quante collisioni ci sono in un certo periodo di tempo, mettiamo in un secondo, quando siamo in presenza di un numero  $N$  di atomi. Innanzi tutto osserviamo che, potranno colpire il pistone, durante quel periodo di tempo che abbiamo scelto, solo quegli atomi che sono in una certa vicinanza del pistone stesso. Difatti se la particella è troppo lontana riuscirà a raggiungere il pistone nell'intervallo di tempo previsto solo se la sua velocità è molto elevata. Si ricorda che lo spazio si misura anche come prodotto tra la velocità ed il tempo. Di conseguenza appare chiaro che solo le particelle abbastanza vicine, diciamo tali per cui si trovano entro ad una distanza data dal prodotto della velocità della particella per il tempo scelto, potranno colpire il pistone. Allora il numero di collisioni in un tempo  $t$  è pari al numero di atomi  $n$  (sottoinsieme di  $N$ ) con velocità  $v_x$  che sta nel volume  $nv_x t A$ . La forza per unità di tempo è quindi data dal prodotto di questo volume per 2 volte la quantità di moto divisa per il tempo. Il che comporta che la pressione è proporzionale al quadrato della velocità. La prima cosa che vediamo è che le molecole hanno velocità differenti, pertanto quello che dobbiamo fare è di fare la media del quadrato delle velocità di tutte le molecole. In tal caso omettiamo il fattore 2 perchè teniamo conto in media di solo quelle particelle che vanno verso il pistone. Noi facciamo la media solo delle particelle entranti positive e non di quelle uscenti negative, cioè la media della velocità quadratica con velocità positiva è pari alla media della velocità di tutte le particelle entranti ed uscenti diviso per due. Gli atomi possono muoversi in ogni direzione per cui sarà vero che il moto medio degli atomi in una direzione e la media nelle altre due direzioni sono tutte uguali. Allora la media delle medie in tutte le tre direzioni è un terzo della somma delle medie quadratiche. In questo modo abbiamo il vantaggio che non ci dobbiamo più occupare di alcuna particolare direzione e quindi la formula della pressione può essere scritta in modo da tenere conto della energia cinetica del moto del centro di massa della molecola moltiplicando e dividendo per un fattore due. Talchè :

$$PV = N \frac{2}{3} \left( \frac{mv^2}{2} \right)$$

da cui conoscendo la velocità di una particella si ottiene la pressione.

Ogni volta che comprimiamo il gas l'energia interna cresce ed il volume diminuisce sicchè la pressione salirà.

Una compressione in cui non venga aggiunta o sottratta energia termica è chiamata adiabatica. In una compressione adiabatica tutto il lavoro eseguito va a cambiare l'energia interna, cioè non vi sono altre perdite di energia. Fin'ora non abbiamo trattato della temperatura, sappiamo solo che quando comprimiamo un gas l'energia delle molecole aumenta e diciamo che il gas diventa più caldo. Se ne può dedurre che l'energia cinetica media delle molecole è una proprietà della sola temperatura, non del gas e quindi può essere usata come definizione della temperatura. Se usassimo l'energia media molecolare per definire la temperatura sarebbe facile trovare la definizione, ma purtroppo la scala delle temperature è stata scelta in modo differente così che dobbiamo usare un fattore di conversione tra l'energia di una molecola e un grado di temperatura assoluta chiamato grado Kelvin. Questa costante di

proporzionalità è  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  joule per ogni grado Kelvin. Così che se la temperatura  $T$  è la temperatura assoluta attraverso la nostra definizione avremo che l'energia cinetica media molecolare è proporzionale alla temperatura attraverso il fattore  $k$ . Ricordando che l'energia cinetica associata con la componente del moto in qualsiasi direzione del moto è  $\frac{1}{2}kT$ , per le tre direzioni è  $\frac{3}{2}kT$ .

Ora che abbiamo definito la temperatura possiamo trovare la legge che dà la pressione in funzione della temperatura. Essa è : la pressione per il volume è uguale al numero totale di atomi per la costante universale  $k$  per la temperatura. La conseguenza è che uguali volumi di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione e volume hanno egual numero di molecole.

## 1.2 I principi della meccanica statistica

La descrizione della materia dal punto di vista delle collisioni tra gli atomi, è chiamata teoria cinetica. Le leggi della meccanica che si applicano all'equilibrio termico sono chiamate meccanica statistica.

Abbiamo già visto uno dei teoremi della meccanica statistica cioè il valor medio dell'energia cinetica di qualunque moto alla temperatura assoluta  $T$  è  $\frac{1}{2}kT$  per ogni moto indipendente , cioè per ogni grado di libertà. Ora dobbiamo scoprire quanti di loro si troveranno nei diversi posti all'equilibrio termico e conoscere i dettagli, meglio la distribuzione delle velocità. Difatti seppur conosciamo la velocità quadratica media non conosciamo quanti sono gli atomi che hanno una velocità che si discosta da questa oppure hanno tutti quanti la stessa velocità. Insomma come sono distribuiti gli atomi nello spazio e quale è la loro velocità.

Partiamo da un esempio sulla nostra atmosfera, ma diversamente dalla nostra atmosfera, che si raffredda andando verso l'alto, la colonna di gas è in equilibrio termico. Se la temperatura è equivalente a tutte le altezze il problema è quello di scoprire con quale legge l'atmosfera va rarefacendosi, salendo. Se  $N$  è il numero di molecole per un volume  $V$  di gas a pressione  $P$  sappiamo che  $PV = NkT$ . In altre parole se conosciamo il numero di molecole per unità di volume conosciamo la pressione e viceversa: sono proporzionali tra di loro in quanto la temperatura l'abbiamo posta costante. Ma la pressione non è costante deve aumentare al diminuire della altezza perchè deve reggere il peso di tutto il gas sovrastante. Se prendiamo una area unitaria all'altezza  $h$ , allora la forza verticale dal disotto, su questa area unitaria, è la pressione. La forza verticale che preme verso il basso all'altezza  $h + dh$  sarebbe la stessa in assenza di gravità, ma qui non lo è perchè la forza dal disotto deve superare quella dal di sopra del peso del gas nella sezione tra  $h$  e  $h + dh$ . Ora  $mg$  è la forza di gravità su ogni molecola ove  $g$  è l'accelerazione di gravità ed  $ndh$  il numero totale di molecole nella unità di sezione. Questo ci dà l'equazione differenziale

$$P_{h+dh} - P_h = dP = -mgndh$$

Ma siccome  $P = nkT$  e  $T$  è costante possiamo eliminare  $P$  ed otteniamo la equazione differenziale

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT}n$$

Ciò produce una soluzione del tipo:

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}$$

che è una distribuzione esponenziale della densità delle particelle che deriva dalla soluzione dell'equazione differenziale. essa lega la variazione delle particelle in funzione dell'altezza con il rapporto tra la forza peso di queste moltiplicato per il numero delle particelle stesse ed il prodotto  $kT$ . Ovviamente il numero di particelle con masse differenti diminuiscono a seconda delle loro masse.

Si può notare che il numeratore dell'argomento dell'esponente è l'energia potenziale di un atomo e quindi la densità di ogni punto è proporzionale all'esponente dell'energia potenziale di ciascun atomo diviso per la la energia cinetica media.

$$e^{-\text{energiapotenziale di ciascun atomo}/kT}$$

Questa relazione è nota come legge di Boltzmann e ci dice che la probabilità di trovare molecole in una data disposizione spaziale varia esponenzialmente con l'energia potenziale diviso per  $kT$ .

Vediamo ora la distribuzione delle velocità. Se utilizziamo l'esempio precedente possiamo dire che l'unica forza potenziale che abbiamo incluso è la forza di gravità; tralasciamo ovviamente le forze atomiche. Abbiamo visto che ad altezza 0 ci sono più molecole che ad altezza  $h$ . Le molecole da altezza zero che vanno verso l'alto non hanno sufficiente velocità per raggiungere  $h$ . Vediamo come possiamo dimostrarlo. Sappiamo che il numero di molecole che passa il piano a livello zero  $h=0$  dal di sotto con velocità  $v_z > u$  è eguale al numero di molecole che passa  $h=h$  dal di sopra con velocità  $v_z > 0$ . Ma il numero che passa attraverso  $h$  con qualunque velocità maggiore di 0 è minore del numero che passa per l'altezza inferiore con qualunque velocità maggiore di 0, perchè il numero di atomi è più grande. Così il numero di molecole per unità di area per secondo che passa per l'atezza  $h=0$  con componente  $z$  della velocità maggiore di  $u$  è

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/2kT} = e^{-mu^2/2kT} = e^{-\text{energiacinetica}/kT} \quad (1.1)$$

volte il numero totale che passa per il piano con velocità maggiore di zero.

Questo modo di descrivere la velocità dando il numero di molecole che passano una data area con una certa componente minima  $z$  non è il modo più conveniente per dare la distribuzione delle velocità. Per esempio desideriamo conoscere quante sono le molecole che si muovono con una componente  $z$  della velocità compresa tra due valori dati. Per far questo dovremmo pensare che la frazione di tutte le molecole che hanno velocità tra un valore  $u$  e quello immediatamente superiore  $du$  sia  $f(u)du$  ( $du$  è un infinitesimo).

Domandiamoci ora qual'è la espressione in funzione di  $f(u)$  del numero di molecole che attraversano al secondo una area con velocità superiore ad  $u$ ? Bisogna notare che le molecole più veloci passano più spesso di quelle lente e quindi è necessario moltiplicare la  $f(u)$  per  $u$ , la velocità. Così il numero di molecole che arrivano non è solo il numero che c'è ma il numero per unità di volume moltiplicato per la distanza che esse percorrono nella corsa verso l'area attraverso la quale debbono passare, e questa distanza è proporzionale a  $u$ . Allora abbiamo

bisogno dell'integrale della velocità di

$$\int_u^\infty u \times f(u) du = \text{costante} \times e^{-mu^2/2kT}$$

con limite inferiore  $u$ , uguale alla distribuzione della relazione 1.1 moltiplicato per una costante. La soluzione è assai facile se si differenzia l'intera equazione rispetto ad  $u$ . Per l'integrale otteniamo l'integrando (con il segno meno dato che  $u$  è il limite inferiore) e per l'esponenziale, l'esponenziale stesso moltiplicato per  $u$ . Otterremo:

$$f(u) du = \text{costante} \times e^{-mu^2/2kT} du \quad (1.2)$$

Il valore della costante può essere trovato ricordando che l'area totale della distribuzione (cioè l'integrale) deve essere uguale ad 1, ciò comporta

$$\text{costante} = \sqrt{m/2\pi kT}$$

Siccome velocità e quantità di moto sono proporzionali possiamo dire che la distribuzione della quantità di moto è proporzionale a

$$e^{-E.C./kT} \quad (1.3)$$

Questo teorema è vero anche nella relatività solo se è in termini di quantità di moto, e non per la velocità. Così troviamo che le probabilità di differenti condizioni di energia cinetica e potenziale sono entrambi dati da una funzione esponenzialmente decrescente dell'energia divisa per  $kT$ . Facilmente i nostri calcoli si trasferiscono per una particella che va non solo verticalmente ma in tutte le direzioni semplicemente moltiplicando la probabilità che le particelle vadano in ogni direzione tra di loro.

### 1.2.1 I calori specifici e il fallimento della fisica classica

Abbiamo visto come le caratteristiche di un gas dipendono dalla sua energia interna, se si tratta di un gas monoatomico l'energia interna è uguale alla energia cinetica del moto di centro di massa degli atomi, ma supponiamo che si tratti di una molecola più complicata che può ruotare su se stessa, vibrare, allora la energia interna è più complessa e avremmo delle difficoltà a spiegare il comportamento delle forze con il concetto della molla (oscillatore classico ad esempio descrivibile dalla molecola dell'ossigeno). Per di più risulta sperimentalmente che il rapporto tra i calori specifici  $\gamma$  è lontano da quanto ci si aspetta, soprattutto per gas con molecole complesse. Da qui il primo dei tanti fallimenti della fisica classica che porteranno poi alla enunciazione della fisica moderna quantistica. Difatti se facessimo l'ipotesi che un moto vibrazionale non esistesse a bassa temperatura allora possiamo immaginare che un gas possa esistere ad una temperatura abbastanza bassa perchè la vibrazione non abbia luogo. Lo stesso si potrebbe dire per la rotazione. A certe temperature sembra che certi tipi di moto si congelino. Ciò non può essere compreso dalla fisica classica. Solo la



meccanica quantistica con l'introduzione dei livelli energetici discreti, cioè di differenti stati di energia è in grado di spiegare questo congelamento. Ma il semplice risultato ottenuto dalla meccanica statistica che

$$n = n_0 e^{-Energia/kT} \quad (1.4)$$

diventa un importantissimo teorema. Infatti se le energie dell'insieme di stati molecolari sono detti ad esempio  $E - 0, E - 1..E - i$  allora in equilibrio termico la probabilità di trovare una molecola nel particolare stato in cui ha Energia  $E - i$  è proporzionale a  $e^{-E_i/kT}$ . Ciò dà la probabilità di essere nei vari stati. In altre parole la probabilità di essere nello stato  $E_1$  rispetto a quello di essere nello stato  $E_0$  è

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}} \quad (1.5)$$

Così è meno probabile essere in uno stato di energia più elevata che bassa. Per un oscillatore armonico i livelli di energia risultano egualmente spazati. Se chiamiamo  $E_0 = 0$  l'energia più bassa, il primo livello è  $E_1 = h\omega$  il secondo  $E_2 = 2h\omega$  etc. Se ora supponiamo di studiare le vibrazioni di una molecola biatomica, che approssimiamo con un oscillatore armonico, qual'è la probabilità relativa di trovare una molecola nello stato  $E_1$  piuttosto che nello stato  $E_0$ ? La risposta è che la probabilità di trovarla nello stato  $E_0$  diminuisce come

$$e^{-h\omega/kT}$$

Se poi  $kT$  è molto minore di  $h\omega$  avremo una situazione di bassa temperatura e quindi praticamente tutti gli atomi sono nello stato  $E_0$ . Infatti l'energia degli oscillatori non cambia fino a che la temperatura è molto minore di  $h\omega$ . Gli oscillatori sono congelati, non vi è alcun loro contributo al calore specifico. Solo ad alta temperatura gli stati dei gas si avvicinano alla fisica classica.

## 1.2.2 Il moto Browniano

È il moto di una particella che si muove casualmente in un fluido e fu scoperto da Robert Brown nel 1827. Ma il moto Browniano non è solo delle particelle colloidali, si può anche trovare anche in altri contesti. Consideriamo ad esempio un oscillatore carico, un elettrone che oscilla su e giù irradiando luce. Supponiamo che questo oscillatore sia in un gas rarefatto e che gli atomi di tanto in tanto vengono a collisione con esso. In equilibrio, dopo un bel po' di tempo tale oscillatore guadagnerà una energia tale che la sua energia cinetica di oscillazione sarà  $\frac{1}{2}kT$  e dal momento che si tratta di un oscillatore armonico tutta la sua energia di moto diverrà  $kT$ . Questa è una descrizione erronea perchè l'oscillatore porta una carica elettrica e irradia luce. Di conseguenza è impossibile avere equilibrio di materia reale da sola senza che le cariche in essa contenute emettano luce e, quando la luce viene emessa disperde energia ed il moto rallenta. Come possiamo fare per raggiungere l'equilibrio termico? richiudiamo l'oscillatore ed il gas entro una scatola a pareti speculari. Tutta la radiazione uscente dall'oscillatore continua a muoversi all'intorno dentro la scatola. Dopo un po' la radiazione uscente dall'oscillatore ritorna indietro e restituisce parte dell'energia che

è stata irradiata. Si può stabilire quanta luce deve esserci in questa scatola a temperatura  $T$  per far sí che la riflessione della luce su questo oscillatore generi quanto basta di energia per rendere conto della luce che ha irradiato. Se facciamo un calcolo della energia irradiata e di quella ricevuta dopo essere riflessa dalle pareti troviamo quella che si chiama corpo nero. Nero perchè la cavità che noi guardiamo è nera se la temperatura è zero. Se guardiamo le cose da un punto di vista classico ci accorgiamo che la cavità dovrebbe emettere ogni tipo di radiazione, qualunque sia la sua temperatura, dagli X alla radiazione Gamma. Sappiamo invece che se accendiamo una stufa non abbiamo presenza di raggi X e quindi ne deduciamo che la teoria classica non è assolutamente in grado di descrivere il corpo nero. Planck studiando la curva del corpo nero ne dedusse che l'oscillatore armonico può acquistare energie solo in quantità  $h\omega$  alla volta e quello fu l'inizio della meccanica quantistica

### 1.3 Le leggi della Termodinamica

Fin qui abbiamo trattato le proprietà della materia da punto di vista atomico tentando di comprendere che cosa potrebbe accadere se le cose che sono fatte da atomi ubbidiscono a certe leggi. Tuttavia ci sono parecchie relazioni tra le proprietà delle sostanze che si possono ricavare senza considerare la struttura dettagliata dei materiali. La determinazione delle relazioni, senza conoscere la struttura interna dei materiali è oggetto della termodinamica. La termodinamica iniziò con Carnot il quale analizzò il problema di costruire la macchina migliore e più efficiente. Le deduzioni di Carnot furono talmente logiche che sono ancora valide oggi. Egli senza saperlo aveva scoperto la prima e seconda legge della termodinamica. La prima legge della termodinamica è quella della conservazione dell'energia. Se si ha un sistema e gli si cede calore e si compie lavoro su di esso, allora la sua energia aumenta del calore che gli è stato comunicato e del lavoro fatto. Sostanzialmente il calore comunicato al sistema più il lavoro fatto sul sistema è uguale all'aumento dell'energia del sistema, quest'ultima energia è talvolta chiamata energia interna.

La seconda legge asserisce che non è possibile convertire il calore in lavoro ad una certa temperatura senza nessun altro cambiamento nel sistema. Se fosse possibile potremmo sottrarre calore da un corpo freddo e fornirlo ad un corpo caldo senza spendere niente. Noi sappiamo che è naturale scaldare una cosa fredda con una cosa calda, la nostra esperienza ci dice che se mettiamo vicino una cosa calda ad una fredda dopo un po' il corpo caldo scambierà calore con quello freddo e la temperatura dell'uno, corpo caldo, calerà mentre quella del corpo freddo aumenterà fino ad avere all'equilibrio termico una certa temperatura. Supponiamo ora di avere una macchina termica che abbia da qualche parte una caldaia a temperatura  $T_1$ . Un certo calore è sottratto alla caldaia  $Q_1$  e la macchina compie un certo lavoro  $W$  e poi fornisce un certo calore  $Q_2$  ad un condensatore ad una altra temperatura  $T_2$ . Facendo uso della prima legge della termodinamica avremo:

$$Q_2 = Q_1 - W$$

Supponiamo di costruire ora una macchina reversibile solo per variazioni infinitesime. Supponiamo infatti di avere un corpo più caldo a sinistra ed uno più freddo a destra, il calore

fluirà da sinistra a destra, poi se lo raffreddiamo di un po' fluirà da destra a sinistra. Consideriamo una macchina ideale in cui si possano eseguire una espansione isoterma a  $T_1$  assorbimento del calore  $Q_1$ , una espansione adiabatica in cui la temperatura scende da  $T_1$  a  $T_2$ , una compressione isoterma a  $T_2$  cessione del calore  $Q_2$ , una compressione adiabatica in cui la temperatura sale da  $T_2$  a  $T_1$ . Avremo un diagramma che ci permetterà di valutare l'ammontare complessivo di lavoro attraverso la variazione di pressione e volume. Così che il lavoro è l'area sotto ogni curva è una misura del lavoro fatto e sarà calcolato come l'integrale del prodotto della pressione per la variazione differenziale del volume  $\int pdV$ . Questa relazione ci dice che non è possibile produrre più lavoro di una quello che si può produrre da una macchina reversibile nelle stesse condizioni di temperatura. Inoltre se una macchina è reversibile non importa come è stata progettata, il lavoro che si ottiene non dipende dalla struttura della macchina.

Passiamo ora al rendimento di una macchina reversibile studiandola con l'unica sostanza di cui conosciamo le leggi, un gas perfetto. La legge che determina il lavoro  $W$  in funzione di  $Q_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ . Esso è proporzionale a  $Q_1$ . Questa legge universale si può ottenere con argomentazioni logiche. Supponiamo di avere tre macchine e tre temperature  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ . Una macchina assorbe il calore  $Q_1$  alla temperatura  $T_1$  ed esegue una certa quantità di lavoro  $W_{13}$  e ceda il calore  $Q_3$  alla temperatura  $T_3$ , un'altra macchina funzioni a rovescio tra  $T_2$  e  $T_3$ . Supponiamo che la seconda macchina sia tale da assorbire lo stesso calore  $Q_3$  e cedere il calore  $Q_2$ . Dovremo cederle del lavoro  $W_{32}$  negativo perchè la macchina va a rovescio. Allora quando una macchina compie un ciclo essa assorbe lo stesso calore  $Q_1$  e cede  $Q_3$  alla temperatura  $T_3$ , poi la seconda macchina assorbe lo stesso calore  $Q_3$  dal serbatoio a temperatura  $T_3$  e lo cede al serbatoio all'atempertura  $T_2$ . Quindi il risultato netto è di prendere il calore  $Q_1$  da  $T_1$  e cedere  $Q_2$  da  $T_2$ . Le due macchine sono equivalenti ad una terza macchina che assorba  $Q_1$  da  $T_1$  faccia il lavoro  $W_{12}$  e cede il calore  $Q_2$  a  $T_2$  dato che, utilizzando la prima legge:

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_2) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}$$

A questo punto è possibile definire qual'è il suo rendimento, perchè deve esistere qualche relazione fra i rendimenti delle macchine funzionanti tra le temperature. Dobbiamo avere una temperatura di riferimento e una temperatura qualsiasi e conoscere il rendimento della macchina tra queste due temperature. Utilizzeremo anche un simbolo per definire il calore a questa temperatura di riferimento  $Q_s$ . In altre parole quando una macchina reversibile assorbe il calore  $Q$  alla temperatura  $T$  essa cederà calore  $Q_s$  alla temperatura unitaria. Così in realtà tutto quello che dobbiamo fare è di trovare quanto calore  $Q_1$  dobbiamo immettere alla temperatura  $T_1$  per cedere una certa quantità di calore  $Q_s$  alla temperatura unitaria. Il calore è funzione della temperatura. Allora la legge è : per una data quantità di calore  $Q_s$  ceduta ad un grado da una macchina funzionante alla temperatura  $T$  gradi, il calore assorbito  $Q$  deve essere della quantità  $Q_s$  moltiplicata per una certa funzione crescente della temperatura

$$Q = Q_s f(T)$$

Questa relazione ci permette di definire la temperatura in modo indipendente da qualunque sostanza particolare. Dato che abbiamo trovato che la funzione aumenta con la temperatura, definiremo la funzione stessa come la temperatura misurata in unità del grado di

temperatura di riferimento:

$$Q = ST$$

Ciò significa che possiamo dire quanto è caldo un oggetto trovando quanto calore è assorbito da una macchina reversibile funzionante tra la temperatura dell'oggetto e la temperatura unitaria. La temperatura così definita è chiamata temperatura termodinamica assoluta. Ora vediamo ciò che succede quando abbiamo due macchine, una funzionante fra  $T_1$  ed un grado, l'altra funzionante tra  $T_2$  ed un grado, che cedono lo stesso calore alla temperatura unitaria, allora i due calori assorbiti debbono essere legati da

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = S$$

Tutte le volte che la macchina è reversibile deve esistere questa relazione tra le quantità di calore. Vediamo ora che cosa se ne può dedurre. Prima di tutto il rendimento di una macchina reversibile. Mettendo insieme la prima legge e questo principio avremo che il rendimento di una macchina reversibile è proporzionale alla differenza della temperatura fra le quali la macchina lavora, divisa per la temperatura più elevata. Il rendimento non può essere superiore a 1 e la temperatura assoluta non può essere minore di zero, lo zero assoluto. Inoltre, oltre la pressione, che è funzione della temperatura e del volume e l'energia interna che è funzione della temperatura e del volume abbiamo trovato un'altra grandezza che chiameremo Entropia che è funzione dello stato, ancora una volta dipendente dal volume e dalla temperatura. Per lungo tempo si ritenne che esistesse solo la differenza di entropia e non l'entropia assoluta fino a che Nerst introdusse il teorema del calore o terza legge della termodinamica che asserisce che l'entropia di un oggetto allo zero termico è zero. Applichiamo i nostri principi ad un gas perfetto. In una espansione isoterma e quindi reversibile la temperatura è costante e quindi la variazione entropica è data dal logaritmo del rapporto dei volumi iniziale e finale. In un processo irreversibile l'entropia invece aumenta, mentre rimane costante in un processo reversibile.

## Chapter 2

# La relatività Speciale

Il principio di relatività fu enunciato per la prima volta da Newton in uno dei corollari sul moto: i moti dei corpi all'interno di uno spazio dato sono gli stessi tra di loro sia che lo spazio sia in quiete sia che si muova uniformemente in linea retta. Ciò significa che se una nave spaziale si muove a velocità uniforme tutti gli esperimenti fatti nella nave in movimento appariranno gli stessi come se la nave non fosse in movimento, purchè naturalmente non si guardi all'esterno.

Questo principio assai semplice fu utilizzato in meccanica per lungo tempo. Il problema sorse quando si cercò di adattare il principio alla luce e all'elettromagnetismo. Infatti se si usano le equazioni di Maxwell utilizzando le trasformazioni che derivano dalla relatività newtoniana vediamo che la loro forma non è più la stessa. Il che equivale a dire che in una nave spaziale in movimento i fenomeni ottici e quelli elettrici sarebbero diversi da quelli della nave ferma. Si potrebbero anche usare questi fenomeni ottici per determinare la velocità della nave. Infatti una delle conseguenze delle equazioni di Maxwell è che se vi è una perturbazione nel campo cosicchè di generi luce, queste onde elettromagnetiche si propagano in tutte le direzioni ugualmente alla stessa velocità  $c=300.0000$  km/secondo. Questa indipendenza del moto della sorgente propone un interessante problema. Supponiamo di essere in moto su di una auto a velocità  $u$  e che della luce proveniando da dietro stia superando la macchina con velocità  $c$ . In un sistema Galileano la trasformazione che viene introdotta è determinata dalla differenza tra il punto fisso e quello mobile, ricordando che lo spazio si misura anche come prodotto tra la velocità e il tempo. Secondo questa trasformazione la velocità apparente della luce che oltrepassa la macchina non dovrebbe essere  $c$ , ma  $c$  meno la velocità della macchina. In ogni caso misurando la velocità della luce che oltrepassa la macchina, se la trasformazione Galileana è esatta per la luce, si potrebbe misurare la velocità della automobile. Una quantità di esperimenti fatti sulla base di questo assunto per determinare la velocità della Terra, fallirono dando velocità uguale a zero. Evidentemente c'era qualcosa di sbagliato nella equazioni.

## 2.1 Le trasformazioni di Lorentz

Il primo pensiero fu che le equazioni di Maxwell erano sbagliate, per cui furono modificate. Il risultato fu che i nuovi termini avrebbero dovuto dare degli effetti che non furono trovati sperimentalmente.

Nello stesso tempo Lorenz si accorse che le leggi di Maxwell rimanevano nella stessa forma quando si applicava una correzione alle trasformazioni Galileane introducendo un denominatore che teneva conto della velocità della luce. Allora le nuove trasformazioni, denominate di Lorentz, erano

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} & (2.1) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{x - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

Einstein, seguendo un suggerimento di Poincarè, propose che tutte le leggi fisiche dovessero rimanere invariate sotto una trasformazione di Lorentz. In altre parole le leggi da cambiare erano quelle della meccanica non della elettrodinamica, cioè si doveva sostituire alla massa a riposo una massa in movimento trasformata secondo la trasformazione di Lorentz. Applicandola al caso della macchina in moto non saremo mai in grado di scoprire se l'uno o l'altro sia in movimento perchè la forma di tutte le equazioni sarà la stessa in entrambi i sistemi di coordinate. Ma per sapere se questa trasformazione è sperimentalmente corretta, non è sufficiente studiare le leggi della meccanica, ma come fece Einstein, dobbiamo anche analizzare le nostre idee di spazio e di tempo per capire questa trasformazione.

Furono fatti vari tentativi per determinare la velocità assoluta della Terra attraverso l'ipotetico "etere" che si supponeva riempisse tutto lo spazio vuoto. Il più famoso esperimento fu quello di Michelson Morley nel 1887. Occorsero, però, 18 anni prima che i risultati di questo esperimento fossero spiegati da Einstein. L'esperimento di Michelson Morley fu eseguito utilizzando una sorgente di luce, una lastra di vetro parzialmente argentato e due specchi, il tutto montato su una base rigida. Gli specchi sono posti ad eguale distanza dallo specchio semiargentato. Lo specchio semiargentato divide un fascio di luce che arriva. I due fasci risultanti proseguono in direzione fra di loro perpendicolari, fino agli specchi dove sono riflessi indietro verso lo specchio semiargentato. Ritornando sullo specchio semiargentato i due fasci sono ricomposti come due fasci sovrapposti che potranno essere in fase o no a seconda se il tempo trascorso sia uguale o no per entrambi i fasci. La differenza di fase poteva essere messa in evidenza da un fenomeno di interferenza. Se il dispositivo è immobile nell'"etere" i tempi devono essere uguali, ma se è in movimento ad esempio verso destra potrebbe esserci una differenza nei tempi. Nel realizzare l'esperimento Michelson e Morley orientarono un braccio del dispositivo parallelamente al moto della Terra lungo la sua orbita (in certi momenti del giorno e della notte). Questa velocità orbitale è di circa 36 Km/sec e qualsiasi velocità dell'etere dovrebbe essere altrettanto in qualsiasi momento del giorno e della notte in qualsiasi periodo dell'anno. Il dispositivo era ampiamente sensibile per l'osservazione di

un tale effetto, ma il risultato fu nullo. Lorentz suggerì che i corpi materiali si contraggono quando sono in movimento e che tale accorciamento è solo nella direzione del moto e che la nuova lunghezza dipendeva dalla lunghezza del corpo a riposo moltiplicata per la trasformazione di Lorentz. Quando questa modifica viene applicata all'interferometro la lunghezza di un braccio non cambia, ma nell'altro è diminuita di questo fattore moltiplicativo. Così che se il dispositivo si contrae nel modo descritto l'esperimento di Michelson Morley non dà alcun risultato.

## 2.2 Trasformazioni di tempo

Per verificare se l'idea di contrazione è in armonia con i risultati di altri esperimenti bisogna che i tempi siano modificati nel modo espresso dalla quarta relazione di 2.2. Difatti se si esegue un esperimento su di una navicella spaziale in movimento, il tempo è diverso da quello calcolato per un osservatore fermo che sta osservando la navicella spaziale. Per l'uomo che guarda la navicella le azioni di chi sta sulla navicella appaiono tutte rallentate, mentre per chi sta sulla navicella tutte le azioni appaiono a velocità normale. Così che non solo devono accorciarsi le lunghezze, ma anche gli strumenti di misura, gli orologi, devono rallentare secondo la trasformazione di Lorentz.

Costruiamo due orologi basati su due specchi tra i quali viaggia un raggio di luce. Essi hanno le stesse dimensioni e sono sincronizzati tra di loro. Uno di questi orologi viene messo sulla navicella spaziale, perpendicolare al moto della navicella per evitare che si modifichi la lunghezza della barra su cui l'orologio è stato costruito. Vediamo cosa accade all'orologio in movimento. Durante il viaggio l'uomo che sta a bordo della navicella non vede nulla di strano, mentre l'osservatore esterno alla navicella vede che la luce va a zig zag poichè l'asta si muove trasversalmente per tutto il tempo. Se l'asta si muove in avanti di un tratto proporzionale alla sua velocità  $u$  la distanza che percorre la luce nello stesso tempo è  $c$  e quindi la distanza verticale è proporzionale a  $\sqrt{c^2 - u^2}$ . Cioè occorre un tempo più lungo alla luce per andare da una estremità all'altra, nell'orologio in movimento, di quanto occorra per l'orologio fermo. Quindi il tempo apparente è maggiore nell'orologio in movimento. Più è veloce  $u$  più lentamente funziona l'orologio in movimento. Ora se tutti gli orologi in movimento funzionano più lentamente significa che il tempo sta rallentando e quindi anche i processi biologici rallentano.

Ma non sappiamo esattamente quando. Guardando l'equazione 2.2 si nota che la trasformazione di Lorentz si applica alla prima ed alla quarta relazione, cioè solo sulla distanza e sul tempo. Ma quello che accade sul tempo è del tutto inaspettato e nuovo. Infatti viene introdotto un termine  $\frac{ux}{c^2}$  nel numeratore che ci indica che eventi che avvengono in due posti separati nello stesso tempo per un osservatore in movimento non accadono nello stesso tempo per un'altro osservatore fermo cioè c'è una mancanza della simultaneità a distanza.

Ma le trasformazioni di Lorentz ci permettono di introdurre anche altri elementi. Supponiamo di fare una trasformazione di coordinate, a ben guardare la trasformazione di Lorentz è una rotazione di coordinate nello spazio e nel tempo. Quindi i nostri vettori che normalmente indichiamo in tre componenti spaziali sono ora rappresentati con quattro componenti

tre delle quali sono quelle di un vettore comune e la quarta è la componente temporale.

## 2.3 Dinamica relativistica e equivalenza di energia e massa

Vediamo ora di indagare quale forma prendono le leggi della meccanica sotto la trasformazione di Lorentz. Per vedere le conseguenze sulle meccanica di Newton vediamo che la Forza, definita come rapidità di variazione della quantità di moto si modifica tenendo conto della massa a riposo nel seguente modo:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.2)$$

Sotto questa modifica se azione e reazione rimangono eguali vi sarà conservazione della quantità di moto nello stesso modo della fisica classica, ma la quantità di moto non è più il vecchio prodotto della massa (costante) per la velocità, ma verrà sostituita dalla nuova massa modificata. La quantità di moto allora cambia al punto che quando la velocità diventa quella della luce la quantità di moto va all'infinito. Guardiamo cosa succede quando una forza agisce a lungo su di un corpo. Nella meccanica newtoniana il corpo continua ad acquistare velocità finchè va più veloce della luce. Ma questo è impossibile per la relatività Einsteiniana dove il corpo non acquista velocità, ma quantità di moto, che può aumentare senza limite perchè la massa è in aumento. Dopo un certo tempo non c'è più accelerazione nel senso di variazione di velocità ma la quantità di moto continua ad aumentare.

Guardiamo ora il comportamento delle molecole di un gas. Quando il gas viene riscaldato la velocità delle molecole viene aumentata e quindi la massa è pure accresciuta ed il gas è più pesante. Se utilizziamo la trasformazione di Lorentz troviamo che la massa si modifica in funzione della velocità.

$$m \approx m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (2.3)$$

Sviluppiamo il prodotto in una serie di potenze trascurando gli ordini superiori. otterremo che

$$m = m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left( \frac{1}{c^2} \right) \quad (2.4)$$

In cui il secondo termine esprime l'aumento dovuto alla velocità molecolare. Quando la temperatura aumenta  $v^2$  aumenta proporzionalmente così che possiamo dire che l'aumento di massa è proporzionale all'aumento di temperatura, ma poichè  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  è l'energia cinetica nel senso newtonian, possiamo dire che l'aumento di massa di tutta la quantità di gas è uguale all'aumento di energia cinetica diviso per  $c^2$  ossia

$$\Delta m = \Delta(E.C.) / c^2 \quad (2.5)$$

Questa osservazione indusse Einstein a suggerire che la massa di un corpo possa essere espressa più semplicemente con la formula 2.4 ottenendo

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$



Dove il primo termine esprime l'energia totale di un corpo e riconosciamo l'ultimo termine come la comune energia cinetica. Einstein interpretò il termine costante  $m_0c^2$  come facente parte dell'energia totale del corpo, una energia intrinseca nota come energia a riposo. Se l'energia di un corpo equivale sempre a  $mc^2$  troveremo come risultato proprio la trasformazione di Lorentz applicata alla massa. Usualmente le variazioni di energia rappresentano variazioni estremamente piccole di massa, poichè generalmente non possiamo generare molta energia da una data quantità di massa. Ad esempio una esplosione nucleare di 20 kiloton di TNT è il prodotto di energia liberata da 1 grammo di materiale.

## 2.4 Le implicazioni dello spazio tempo

La teoria della relatività ci mostra delle relazioni tra le posizioni ed i tempi che non sono quelli che ci saremmo aspettati sulle nostre idee intuitive. Per meglio capirle utilizziamo una analogia: se guardiamo un oggetto possiamo parlare di una lunghezza apparente ed un'altra che chiameremo profondità apparente. Le due idee di lunghezza e profondità non sono proprio proprietà fondamentali dell'oggetto, dato che se guardiamo da un diverso angolo abbiamo una lunghezza ed una profondità differenti. Allora la profondità è una mescolanza tra l'intera lunghezza e l'intera profondità. Solo girando attorno all'oggetto abbiamo modo di conoscere l'effettiva lunghezza e profondità. Nella trasformazione di Lorentz abbiamo una mescolanza di posizioni e di tempo per cui la realtà di un oggetto che osserviamo è qualcosa di più della sua lunghezza e della sua profondità perchè esse dipendono da come le osserviamo. La nostra visione quotidiana però non ci permette di ricalcolare mentalmente le coordinate di tempo e spazio perchè non abbiamo esperienza a vedere le cose ad alta velocità. Dovremo allora immaginare un mondo con spazio e tempo mescolati assieme. Avremo un insieme in cui l'oggetto occuperà uno spazio per un certo tempo, una specie di bolla che noi quando ci muoviamo osserviamo da diversi punti di vista. Queste bolle, sono entità geometriche nel quale si ha lo spazio tempo ed in cui un dato punto è detto evento. Pur essendo la geometria dello spazio tempo non Euclidea ha con questa alcune somiglianze. Infatti se il quadrato della distanza è definito dalla somma dei quadrati delle coordinate  $x, y, z$ , nello spazio tempo avremo che è costante la differenza tra i quadrati del prodotto di  $c \times t$  e la somma dei quadrati delle dimensioni spaziali:  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ . Questa quantità è qualcosa di reale ed è l'intervallo fra due punti dello spazio tempo, uno di questi è nell'origine. La regione spazio temporale che circonda un dato punto dello spazio tempo può essere suddivisa in tre regioni. In una regione abbiamo intervalli spaziali ed in due regioni intervalli temporali, passato e futuro. Si può passare dal passato verso il futuro, influenzandolo nello spazio tempo andando a velocità minore della luce, ma noi non possiamo influenzare lo spazio perchè niente può accadere a velocità superiore della luce.

## Chapter 3

# Il comportamento quantistico

La meccanica quantistica è la descrizione del comportamento della materia e della luce in tutti i suoi dettagli ed in particolare cosa avviene su scala atomica. Il comportamento quantistico degli oggetti atomici (elettroni, protoni, neutroni, fotoni etc) è lo stesso per tutti, sia che si comportino come particella o onda. Il graduale accumularsi di informazioni sul comportamento atomico e su scala microscopica ingenerò uno stato di crescente confusione finchè venne superato da Schroedinger, Heisenberg e Born. Nonostante questo il comportamento atomico è così diverso dalla comune esperienza che è difficile abituarsi: è misterioso e strano sia per il principiante che per lo scienziato. Non è spiegabile e quindi può essere solo descritto.

Facciamo un esperimento concettuale usando per semplicità elettroni prodotti da un cannone elettronico formato da un filo riscaldato elettricamente e circondato da un involucro metallico provvisto di un foro. Se il filo è mantenuto ad una tensione negativa rispetto all'involucro, gli elettroni emessi dal filo verranno accelerati verso le pareti ed alcuni di essi usciranno dal foro. Tutti gli elettroni avranno la stessa energia. Di fronte al cannone vi è una parete con due fori. Dietro i fori c'è un rivelatore che misura l'arrivo degli elettroni. Chiudiamo adesso uno dei due fori ad esempio il foro 1 e misuriamo gli elettroni che arrivano, poi apriamo il foro 1 e chiudiamo il foro 2. Misuriamo gli elettroni che arrivano. Dalla meccanica classica se gli elettroni si comportassero come particelle, aprendo i due fori si otterrebbe la somma degli impulsi registrati separatamente sui due fori. Invece no si ottiene un fenomeno di interferenza come se gli elettroni avessero un comportamento ondulatorio. Si potrebbe pensare che gli elettroni si dividono a metà sui due fori, ed invece no arrivano interi. Inoltre è difficile pensare che facciano un percorso complicato quando la curva interferometrica ci dice che al centro tra i due fori si registra un numero superiore al doppio della somma delle misure effettuate per i due fori. Tutto ciò è misterioso e non è deducibile dalla matematica delle due curve, ma dalla matematica della interferenza tra due onde.

Se ne deduce che gli elettroni arrivano come dei granuli e la loro probabilità di arrivo varia con la distribuzione d'intensità proprio come un'onda. In questo senso gli elettroni si comportano talvolta come particelle e talvolta come onde. Tra l'altro la rappresentazione matematica si adatta bene alla natura del fenomeno che in meccanica quantistica si rappresenta mediante

numeri complessi.

### 3.1 Osservando gli elettroni

Aggiungiamo al nostro esperimento una sorgente di luce molto forte, posta dietro lo schermo a metà tra i due fori, perchè sappiamo che le cariche elettriche diffondono la luce cosicché quando ogni elettrone riesce in un qualche modo ad oltrepassare lo schermo prima di raggiungere il rivelatore devierà verso il nostro occhio della luce e quindi potremo vedere il cammino dell'elettrone stesso. L'esperimento mostra che ogni qualvolta il nostro rivelatore dà un segnale vediamo un lampo di luce o vicino a un foro o l'altro, ma mai assieme, indipendentemente dalla posizione del rivelatore. Questo indica che l'elettrone è passato per uno dei due fori, ma la nostra relazione non dice questo, anzi. Che cosa c'è che non quadra? Heisenberg ha suggerito che le nuove leggi della natura potevano essere coerenti solo se esisteva una basilare limitazione alle nostre possibilità sperimentali: egli propose il "Principio di Indeterminazione" che si può così enunciare. "è impossibile costruire un apparecchio per determinare da quale foro è passato l'elettrone, che allo stesso tempo non perturbi l'elettrone a sufficienza da distruggere l'interferenza" Questo enunciato è alla base della meccanica quantistica. Rispetto alla meccanica classica appare evidente che si introduce un concetto nuovo, quello di probabilità che ci dice che non siamo in grado di prevedere esattamente ciò che accadrà in una data situazione.

### 3.2 Il principio di indeterminazione

Estendendo i concetti precedenti possiamo dire che se eseguiamo la misura di un oggetto qualsiasi, si riesce a determinare la componente  $x$  del suo impulso con una incertezza  $\Delta p$ , non si può contemporaneamente, conoscere la sua coordinata di posizione con una precisione maggiore di

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p}$$

dove  $h$  è la costante di Planck.

Vediamo ora quale è la relazione tra il punto di vista ondulatorio e quello corpuscolare. Innanzi tutto sappiamo che la novità della rappresentazione quantistica consiste nell'assegnare ad ogni evento un'ampiezza. Se poi l'evento riguarda l'arrivo di una particella allora si può assegnare l'ampiezza relativa alla rivelazione di quella particella in punti differenti e a tempi diversi. La probabilità di trovare la particella è allora proporzionale al modulo quadrato dell'ampiezza e varia con la posizione ed il tempo.

Vediamo se la meccanica quantistica è corretta e quale è la ragione per cui vi è incertezza sulla posizione o sull'impulso. Supponiamo che da lontano arrivino delle particelle su di una fenditura. Sappiamo che le particelle hanno un impulso orizzontale  $p_0$ , quindi l'impulso verticale, se pensiamo in modo classico, è definito prima che le particella passino il foro. Poiché

abbiamo detto che le particella provengono da lontano la componente verticale dell'impulso è nulla. Ma appena passano la fenditura di larghezza  $B$  noi conosciamo la posizione verticale con una precisione che dipende da  $\pm B$ . Noi prima sapevamo che le particelle avevano un impulso orizzontale, ma dopo che essa sono passate dalla fenditura non lo sappiamo più. Prima che le particelle attraversassero la fenditura non conoscevamo la loro posizione verticale, adesso che sappiamo la loro posizione verticale, dal fatto che sono passate dalla fenditura, abbiamo perso l'informazione circa la componente verticale dell'impulso. Questo è dovuto al fatto che secondo la teoria ondulatoria vi è un certo sparpagliamento delle onde dopo aver attraversato la fenditura. Quindi c'è una certa probabilità che le particelle uscenti dalla fenditura non vengano fuori perfettamente diritte. Il fascio si allarga e la sua apertura è una misura dell'indeterminazione angolare della situazione finale. Dire che si allarga significa che le particelle hanno una certa possibilità a nuoversi su e giù, cioè di avere un impulso verso l'alto o il basso. Più è stretta la fenditura più si sparpaglia il fascio e più aumenta la probabilità di trovare che le particelle hanno una componente verticale dell'impulso.. Quindi l'indeterminazione nella componente verticale dell'impulso è inversamente proporzionale alla indeterminazione in  $y$ . Otteniamo che il prodotto della componente verticale dell'impulso e della posizione è dell'ordine della costante di Plack  $h$ , cioè:

$$\Delta y \Delta p_y = h$$

L'equazione non si riferisce alle osservazioni del passato, ma alla possibilità di predire. Per arrivare a questa relazione allora in meccanica quantistica si interpreta il numero di onde come una misura dell'impulso della particella in base alla relazione

$$p = \hbar k$$

di modo che risulta proprio che

$$\Delta p = \hbar / \Delta x$$

Consideriamo ora una applicazione del principio di indeterminazione. Essa riguarda la determinazione delle dimensione degli atomi ed il fatto che, classicamente, gli elettroni dovrebbero irradiare luce fino a cadere a spirale sul nucleo, cosa che sappiamo non è corretta dal punto di vista della meccanica quantistica.

Supponiamo di avere un atomo di idrogeno e di voler misurare la posizione dell'elettrone. Come sappiamo non possiamo stabilire esattamente dove esso sia altrimenti l'indeterminazione dell'impulso risulterebbe infinita. Ogni volta che osserviamo un elettrone questi è da qualche parte, ma ha un'ampiezza non nulla in punti differenti di modo che c'è una probabilità non nulla di trovarlo in punti differenti. Questi punti non possono essere tutti sul nucleo e quindi supporremo che ci sia una indeterminazione di ordine  $a$  nella posizione dell'elettrone rispetto al nucleo. Questa posizione si può trovare considerando che l'energia totale dell'atomo sia minima.

Per il principio di indeterminazione l'incertezza sull'impulso è  $p = \hbar/a$ . Perciò l'energia cinetica sarà circa

$$\frac{1}{2}mv^2/2 = p^2/2m = \hbar^2/2ma^2$$

Inoltre l'energia potenziale è data da

$$-e^2/a$$

dove  $e^2$  è la carica dell'elettrone al quadrato. Se  $a$  decresce l'energia potenziale diminuisce; ma più è piccolo a più l'impulso deve essere grande per il principio di indeterminazione e quindi è maggiore l'energia cinetica. L'energia totale è:

$$E = \frac{h^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}$$

Noi non conosciamo  $a$ , ma sappiamo che l'atomo si sistemerà secondo un compromesso che renda l'energia più piccola possibile. Se deriviamo l'energia rispetto alla distanza  $a$  e la poniamo uguale a zero otterremo:

$$\frac{dE}{da} = 0 \tag{3.1}$$

$$a_0 = \frac{h^2}{me^2} = 0.528 \text{Angstrom}$$

Questa particolare distanza si chiama raggio di Bohr. In questo modo abbiamo trovato che le dimensioni dell'atomo sono dell'ordine dell'Angstrom. Se poi poniamo il valore di  $a$  così trovato troveremo che l'energia è data da:

$$E_0 = \frac{e^2}{2a_0} = -13.6 \text{ev}$$

L'energia negativa ci dice che l'elettrone ha una energia minore quando è nell'atomo di quando è libero. Significa che è legato e che ci vuole una certa energia per farlo uscire dall'atomo; serve una energia di 13.6 ev per ionizzare un atomo d'idrogeno. Questo numero 13.6 ev viene detto un Rydberg di energia.

Queste relazioni ci stanno spiegando perchè ad esempio non cadiamo attraverso il pavimento. Quando camminiamo le nostre scarpe con la loro massa di atomi pestano il pavimento e tutti i suoi atomi. Per poter comprimere gli atomi densamente bisognerebbe confinare gli elettroni in uno spazio minore, ma per il principio di indeterminazione ciò comporterebbe impulsi, in media, maggiori quindi energia maggiore. La resistenza alla compressione da parte degli atomi è un effetto quantistico, non classico. Infatti classicamenteci si aspetta che avvicinando tra loro gli elettroni ed i protoni, l'energia diminuisca e la migliore sistemazione di cariche positive e negative si ha quando sono una sull'altra. Nella meccanica quantistica se c'è un elettrone in una certa regione di spazio gli altri se ne tengono fuori. Più precisamente ci sono due stati differenti detti di spin il primo in un modo l'altro in un altro. Oltre a questi due non ne possiamo mettere degli altri. Gli altri vanno altrove e questa è la ragione della solidità della materia.

Abbiamo parlato di atomo nella situazione di energia minima possibile, ma l'atomo ha modo di vibrare ed oscillare con maggiore energia, producendo diversi tipi di moto all'interno.

Secondo la meccanica quantistica, in condizioni stazionarie, l'atomo può avere solo certe energie definite. Quando gli elettroni sono liberi la loro energia è positiva e possono muoversi con velocità arbitraria. Ma le energie degli stati legati non sono arbitrarie. L'atomo deve avere energia pari ad un certo insieme di valori permessi del tipo  $E_0, E_1, E_2, E_3, \dots$ . Se l'atomo si trova in uno degli stati eccitati  $E_1, E_2$  ecc esso non vi rimane indefinitamente ma cade allo stato più basso irradiando energia sotto forma di luce. La frequenza di luce che si libera in

una transizione dall'energia  $E_3$  all'energia  $E_1$  per esempio, è

$$\omega_{31} = (E_3 - E_1)/h$$

e definisce una linea dello spettro di emissione. Così vale per altre transizioni, tanto che se troviamo due linee dello spettro ci possiamo aspettare di trovarne un'altra in corrispondenza della somma delle frequenze e della differenza e che tutte le linee possano essere interpretate in termini di una serie di livelli, in modo che ogni linea corrisponda alla differenza di energia tra una coppia di livelli. Questa coincidenza nelle frequenze spettrali fu notata prima della scoperta della meccanica quantistica e si chiama principio di combinazione di Ritz.

### 3.3 Conseguenze di natura filosofica

L'aspetto più interessante è l'idea del principio di indeterminazione; osservare un fenomeno produce un'influenza sul fenomeno stesso. Seppur si è sempre saputo che sperimentare su di un fenomeno lo perturba, nel caso del principio di indeterminazione non possiamo fare a meno di introdurre un minimo di perturbazione e questa influenza è necessaria per la coerenza del nostro punto di vista. Il fatto che non si possa misurare simultaneamente posizione ed impulso non deve impressionarci più di tanto e soprattutto non ci deve per forza obbligare a rigettare una posizione che non essendo misurabile non può entrare nella teoria. Il fondamento di una scienza sta nella sua capacità di prevedere, cioè fare delle previsioni su di un'esperienza che non è mai stata fatta. Se abbiamo un atomo in uno stato eccitato sappiamo che emetterà un fotone, perchè l'atomo ha una certa ampiezza di probabilità di emettere fotoni, ma non sappiamo esattamente quando e quindi non possiamo prevedere esattamente il futuro. Viceversa il mondo classico viene considerato deterministico perchè se conosciamo la posizione e la velocità di ogni particella potremmo conoscere esattamente ciò che potrà accadere. Ma supponiamo di non conoscere perfettamente la posizione di una particella, diciamo con una incertezza di un miliardesimo. Allora quando questa particella urta un'altra particella l'errore si amplifica e via via l'incertezza diventa più grande e poichè il tempo dipende logicamente dall'errore, accade che perdiamo ogni informazione in breve tempo. Sostanzialmente quindi la meccanica quantistica ci libera definitivamente dal concetto di meccanicismo determinista che proviene dalla meccanica classica giacchè anche in meccanica classica si ha in pratica questa incapacità a fare previsioni.

### 3.4 Le ampiezza di probabilità

Quando si ha una sorgente  $s$  di particelle, ad esempio elettroni, che colpiscono una parete con due fenditure ed oltre la parete un rivelatore collocato ad una certa posizione  $x$ , la domanda che ci si pone è quella di sapere qual'è la probabilità di trovare una particella in  $x$ ? Il primo

principio generale della meccanica quantistica è che la probabilità che una particella arrivi ad  $x$ , partendo dalla sorgente  $s$  può essere rappresentata qualitativamente dal modulo quadrato di un numero complesso detto ampiezza di probabilità. Dirac ha inventato una notazione per scrivere la probabilità di ampiezza

$$\langle \text{laparticellaarrivain}x | \text{laparticellaparteda} s \rangle$$

In altre parole le due parentesi  $\langle \rangle$  sono il simbolo equivalente a "l'ampiezza che". L'espressione a destra delle linee verticali dà sempre lo stato di partenza e quello di sinistra lo stato finale. Va sottolineato che questa ampiezza è, naturalmente niente altro che un numero complesso. Come abbiamo visto in precedenza la probabilità risultante non è la somma della probabilità delle due particelle che passano attraverso le fenditure, ma deve essere scritta come "il modulo quadrato della somma delle due ampiezze". Si può riformulare questo risultato con la notazione di Dirac. Il secondo principio generale della meccanica quantistica stabilisce: quando una particella può raggiungere un certo stato per due cammini, l'ampiezza totale del processo è la somma delle ampiezze relative alle due possibilità prese separatamente che nel nuovo simbolismo si scrive:

$$\langle x | s \rangle_{\text{ambdueiforiaperti}} = \langle x | s \rangle_{\text{attraversoilforo1}} + \langle x | s \rangle_{\text{attraversoilforo2}} \quad (3.2)$$

Vogliamo esporre con maggiore dettaglio quanto si può dire sull'ampiezza relativa al processo in cui l'elettrone giunge al rivelatore in  $x$  passando per il foro 1. Ricorrendo al terzo principio generale della meccanica quantistica potremo dire: quando una particella percorre un particolare cammino, l'ampiezza associata si può scrivere come prodotto dell'ampiezza relativa ad una parte di esso per l'ampiezza riguardante il resto del cammino. In definitiva per un apparecchio che manda elettroni in ogni direzione, l'ampiezza relativa al cammino da  $s$  ad  $x$  attraverso il foro 1 è uguale all'ampiezza per andare da  $s$  ad 1 moltiplicata per l'ampiezza per andare da 1 ad  $x$ , cioè leggendo da destra a sinistra

$$\langle x | s \rangle_{\text{via1}} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle$$

In conclusione se vari eventi si succedono uno dopo l'altro l'ampiezza va calcolata moltiplicando successivamente le ampiezze per ogni evento della successione e quindi la relazione 3.2 può essere riscritta come:

$$\langle x | s \rangle_{\text{ambdueiforiaperti}} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle \quad (3.3)$$

Questa relazione ci permette di descrivere anche esperimenti di interferenza più complessi conoscendo l'ampiezza relativa al passaggio da un punto all'altro. Per avere una idea della forma di una ampiezza tipica, supponiamo di avere una particella di energia fissata che si sposta nel vuoto da un punto  $r_1$  and punto  $r_2$ . L'ampiezza per il passaggio è

$$\langle r_2 | r_1 \rangle = \frac{e^{ipr_{12}/\hbar}}{r_{12}} \quad (3.4)$$

dove  $r_{12} = r_1 - r_2$  e  $p$  è l'impulso legato all'energia  $E$  della equazione relativistica

$$p^2 c^2 = E^2 - (m_0 c^2)^2$$

oppure alla equazione nonrelativistica

$$\frac{p^2}{2m} = \text{Energia cinetica}$$

L'equazione non significa altro che la particella ha proprietà ondulatorie e che l'ampiezza si propaga come un'onda di numero d'onda pari all'impulso diviso per  $h$ . In generale l'ampiezza e la corrispondente probabilità sono dipendenti dal tempo.

Riprendiamo ora l'esperimento mettendo una sorgente di luce dietro le fenditure come abbiamo fatto già in precedenza. Esaminiamo cosa accade se sfruttiamo la nuova notazione ed i principi di combinazione delle ampiezze. Accendiamo la luce dietro alla fenditure. Qual'è l'ampiezza per un processo in cui l'elettrone parte da  $s$  ed un fotone è emesso dalla sorgente di luce e che termina con l'elettrone in  $x$  ed il fotone osservato dietro la fenditura 1? Supponiamo di rivelare il fotone dietro alla fenditura con un rivelatore  $D_1$  e di osservare i fotoni oltre la fenditura 2 con un rivelatore  $D_2$ . Avremo una ampiezza per un fotone che arriva in  $D_1$  in corrispondenza ad un elettrone in  $x$  ed anche un'ampiezza in  $D_2$  ed in corrispondenza un elettrone in  $x$ . Utilizziamo la notazione di prima: avremo un'ampiezza  $\langle 1|s \rangle$  per un elettrone che va dalla sorgente al foro. Inoltre possiamo supporre che esista una certa ampiezza relativa che mentre l'elettrone è nelle vicinanze del foro 1 devii un fotone verso il rivelatore  $D_1$ . Indichiamo questa ampiezza con  $a$ . Infine si ha l'ampiezza  $\langle x|1 \rangle$  che l'elettrone giunga alla fenditura 1 al rivelatore in  $x$ . Quindi l'ampiezza complessiva che un elettrone vada da  $s$  ad  $x$  attraverso la fenditura 1 ed inoltre devii un fotone in  $D_1$  è:

$$\langle x|1 \rangle a \langle 1|s \rangle$$

Ma vi è anche una ampiezza non nulla relativa alla possibilità che un elettrone che attraversa il foro 2 diffonda un fotone verso il contatore  $D_1$ . Chiameremo questo con  $b$ . Di conseguenza

$$\langle x|2 \rangle b \langle 2|s \rangle$$

Allora l'ampiezza associata alla rivelazione dell'elettrone in  $x$  del fotone in  $D_1$  è la somma di due termini uno per ogni cammino possibile dell'elettrone: il primo corrispondente al passaggio dell'elettrone per uno dei due fori, il secondo alla possibilità che il fotone sia diffuso da questo elettrone verso il rivelatore 1. Analogamente si ottiene se il fotone è rivelato dall'altro contatore  $D_2$ . In questo modo possiamo calcolare le probabilità in varie situazioni. Ammettiamo di voler sapere con quale probabilità si registri un conteggio in  $D_1$  ed un elettrone in  $x$ . Questa sarà data dal modulo quadrato dell'ampiezza data da

$$|\langle x|1 \rangle a \langle 1|s \rangle + \langle x|2 \rangle b \langle 2|s \rangle|^2$$

Analizzando bene questa relazione. Se si ha un solo foro avremo che  $b = 0$  e quindi l'ampiezza di probabilità è  $|\langle x|1 \rangle \langle 1|s \rangle|^2$  diminuito del fattore  $|a|^2$ . Supponiamo di voler analizzare l'ampiezza che un elettrone arrivi in  $x$  indipendentemente che sia analizzato da  $D_1$  o  $D_2$ . In questo caso vanno sommate le ampiezze per le varie alternative indistinguibili che possono avere luogo durante l'esperimento, prima che il processo sia completamente finito. Il risultato corretto è:

$$|\langle x|1 \rangle a \langle 1|s \rangle + \langle x|2 \rangle b \langle 2|s \rangle|^2 + |\langle x|2 \rangle a \langle 2|s \rangle + \langle x|1 \rangle b \langle 1|s \rangle|^2$$



## 3.5 Particelle identiche

Ancora una volta trattiamo di un evento che può avvenire in due modi diversi indistinguibili e quindi si ha interferenza tra le ampiezze. Consideriamo delle particelle  $\alpha$  che bombardano per esempio ossigeno. Per rendere agevole l'analisi utilizzeremo come punto di riferimento il baricentro in cui il nucleo di ossigeno e la particella  $\alpha$  hanno le rispettive velocità in direzione esattamente opposte prima e dopo la collisione. La ragione per cui ciascuna particella provoca la deflessione dell'altra è che ogni particella porta una carica positiva e quindi si ha una repulsione elettrica. La diffusione avverrà con probabilità diverse a seconda dell'angolo ed i contatori possono essere progettati per rivelare solo le particelle  $\alpha$ , contatore 1, o i nuclei di ossigeno contatori 2. Avendo utilizzato come riferimento il centro di massa i due contatori sono opposti l'uno all'altro. L'esperimento consiste nel misurare le probabilità di diffusione in varie direzioni. Se l'ampiezza di diffusione è  $f(\theta)$  quando i contatori sono posti in corrispondenza di un angolo  $\theta$ , allora  $|f(\theta)|^2$  sarà la nostra probabilità. Allora se vogliamo l'ossigeno in posizione  $\theta$  ci dovrà essere una particella  $\alpha$  in posizione  $f(\pi - \theta)$ . Allora la probabilità di una particella qualsiasi in  $D_1$  è data dalla somma:

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$$

Poichè non sappiamo quale è la particella che è entrata nel rivelatore, diremo che la particella stessa può essere diffusa di un angolo  $\theta$  o  $\pi - \theta$ . Nel caso di urto tra particelle  $\alpha$  avremo un risultato differente che è il quadrato della somma delle ampiezze di probabilità. Nel caso di elettroni il risultato è ancora differente invece di avere la somma al quadrato delle ampiezze di probabilità abbiamo la differenza. Il risultato è dovuto allo spin dell'elettrone che l'elettrone si porta sempre appresso. Le particelle proiettile possono avere ambedue lo spin su o giù. Lo stesso avverrà per le particelle uscenti e l'ampiezza del processo è la differenza delle ampiezze relative e quindi è la differenza. Questi comportamenti sono dovuti a particelle identiche, come gli elettroni che non possono essere distinti tra di loro. Solo un fattore di fase ci può dare delle informazioni. Se questo fattore di fase è positivo le particelle si chiamano particelle di Bose, se negativo particelle di Fermi. Il fotone, i mesoni, ed il gravitone sono particelle di Bose, mentre l'elettrone, il muone, i nucleoni ed i barioni sono particelle di Fermi. Per particelle con spin si ha una ulteriore complicazione perchè non solo va specificata la posizione della particella ma anche la direzione del loro spin. Solamente quando vengono scambiate particelle identiche in identici stati di spin si ha l'interferenza in ampiezza.

Quando viene emessa luce si ha creazione di un fotone. La probabilità che un atomo assorba un fotone e compia una transizione ad uno stato più alto di energia è proporzionale alla luce che lo illumina. Ma la probabilità che compia la transizione inversa dipende da due cose:

- la probabilità che compia una transizione spontanea
- la probabilità che compia una transizione indotta che è proporzionale alla intensità della luce

Inoltre i coefficienti di assorbimento e di emissione indotta sono eguali e sono legati alla probabilità di emissione spontanea.

Ora vogliamo usare le nostre leggi sul corpo nero. Vogliamo conoscere quanti fotoni ci sono in una scatola se la radiazione è in equilibrio termico con alcuni fotoni della scatola stessa.

Supponiamo che per ogni frequenza  $\omega$  della luce ci sia un certo numero di  $N$  di atomi con due livelli di energia separati da una distanza  $\Delta E = h\omega$ . Chiameremo stato fondamentale lo stato di l'energia più bassa e stato eccitato l'altro. Indicheremo con  $N_f$  e  $N_e$  il numero medio di atomi nei due stati rispettivamente. Dalla meccanica statistica avremo:

$$\frac{N_e}{N_f} = e^{-\Delta E/kT} = e^{-h\omega/kT} \quad (3.5)$$

Siccome nello stato fondamentale ogni atomo può passare allo stato eccitato e viceversa, ogni atomo può allo stato eccitato può emettere un fotone e ritornare allo stato fondamentale. All'equilibrio la velocità di questi due processi deve essere uguale. Tale velocità sono proporzionali all'evento moltiplicato per il numero di atomi presenti. Se il numero medio di atomi è  $\bar{n}$  la velocità di assorbimento è  $N_f \bar{n}$ , mentre la velocità di emissione è  $N_e(\bar{n} + 1)$  uguagliando le due velocità e tenendo conto della 3.5 si trova che il numero medio di fotoni in qualunque stato con frequenza  $\omega$  per una cavità in equilibrio termico è:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1} \quad (3.6)$$

Poichè ogni fotone ha energia  $h\omega$  l'energia complessiva dei fotoni in un certo stato è  $\bar{n}h\omega$  ovvero:

$$E = \frac{h\omega}{e^{h\omega/kT} - 1} \quad (3.7)$$

che rappresenta la legge di emissione del corpo nero o legge di Planck.

## Chapter 4

# Equazione di Schroedinger

Vediamo ora come descrivere il moto di una particella libera nello spazio. Cominciamo con il pensare che il vettore di stato  $|x\rangle$  rappresenti uno stato in cui la particella sia localizzata esattamente alla coordinata  $x$ . Per ogni valore di  $x$  lungo la linea di percorso della particella vi è uno stato corrispondente. Prenderemo questi stati  $|x\rangle$  come stati di base e se tutti i punti della linea sono inclusi, si avrà un insieme completo di stati per descrivere il moto in una dimensione. Sopponiamo ora di rappresentare uno stato differente con  $|\phi\rangle$  che rappresenti un elettrone distribuito in un certo modo lungo la linea. Una maniera di descrivere questo stato è quella di dare tutte le ampiezze di probabilità perchè l'elettrone si trovi anche in ciascuno degli stati base  $|x\rangle$ . Bisogna dare un numero infinito di ampiezze, una per ogni valore di  $x$ . Queste ampiezze le indicheremo con  $\langle x|\phi\rangle$ . Ognuna di esse è un numero complesso e poichè si ha un numero di tali numeri complessi per ogni valore di  $x$ , l'ampiezza  $\langle x|\phi\rangle$  è proprio una funzione di  $x$  che scriveremo come  $C(x)$

$$C(x) = \langle x|\phi\rangle$$

Questo genere di ampiezze variano con continuità con le coordinate quando hanno impulso definito. In questo caso per una particella con un impulso definito, e corrispondentemente una definita energia  $E$ , l'ampiezza di trovarla in una posizione arbitraria  $x$  del tipo:

$$\langle x|\phi\rangle = C(x)e^{ipx/h}$$

Questa equazione esprime un importante principio generale della meccanica quantistica che connette gli stati di base che corrispondono alle varie differenti posizioni nello spazio ad un altro sistema di stati base, quello degli stati di impulso definito. Avendo definito in questo modo l'ampiezza di probabilità che un elettrone nello stato  $\phi$  sia osservato nella posizione  $x$  ci piacerebbe interpretare il modulo quadrato di  $\phi$  come la probabilità di trovare l'elettrone nella posizione  $x$ . Ma disgraziatamente la probabilità di trovare una particella esattamente in un certo punto è zero. Infatti in generale l'elettrone verrà ad occupare una certa regione della linea e poichè in ogni più piccola parte di linea vi è un numero infinito di punti, la probabilità che esso si trovi in un preciso di essi non può essere un numero finito. Si può

solo descrivere la probabilità di trovare un elettrone mediante una distribuzione di probabilità che ci dà la probabilità relativa di trovare un elettrone approssimativamente localizzato nelle varie parti della linea. Se indichiamo con  $prob(x, \Delta x)$  la probabilità di trovare l'elettrone in un piccolo intervallo  $\Delta x$  situato nei pressi di  $x$  allora avremo:

$$prob(x, \Delta x) = | \langle x | \phi \rangle |^2 \Delta x$$

che dice che l'ampiezza  $\langle x | \phi \rangle$  è proporzionale alla ampiezza di probabilità che un elettrone nello stato  $|\phi\rangle$  sia trovato nello stato di base  $|x\rangle$  e la costante di proporzionalità è scelta in modo tale che il modulo quadrato dell'ampiezza dia la densità di probabilità di trovare un elettrone in una piccola zona. Supponiamo di avere un elettrone nello stato  $|\phi\rangle$  e di voler conoscere qual'è l'ampiezza di probabilità di trovarlo in un differente stato  $|\psi\rangle$  che corrisponde ad una condizione di diversa distribuzione dell'elettrone. Trattandosi di un insieme finito di stati discreti avremo:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_{tutti\ x} \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle$$

Se ora consideriamo queste ampiezze normalizzate allo stato modo, allora la somma di tutti gli stati in una piccola regione di  $x$  è equivalente alla moltiplicazione per  $\Delta x$  e la somma di tutti i valori diviene un integrale del tipo;

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \phi \rangle dx$$

Una volta che abbiamo così definito la probabilità di ampiezza vediamo come possiamo descrivere la funzione di probabilità per un elettrone che abbia impulso  $p$ . Sapendo che la probabilità  $\langle x | \phi \rangle = \phi(x)$  rappresenta uno stato in cui la posizione dell'elettrone è ripartita lungo la linea con una distribuzione tale che la probabilità di trovare un elettrone in un intervallo  $dx$  nell'intorno di  $x$  è proprio

$$prob(x, dx) = |\phi(x)|^2 dx$$

possiamo chiederci qual'è la probabilità che questo elettrone abbia impulso  $p$ . Cominciamo trasformando lo stato  $|\phi\rangle$  in un'altro stato  $|impp\rangle$  che definiamo come uno stato con impulso ben preciso pari a  $p$ . Potremo trovare la sua ampiezza utilizzando la relazione

$$\langle impp | \phi \rangle = \int \langle impp | x \rangle \langle x | \phi \rangle dx$$

Naturalmente la probabilità di trovare l'elettrone con impulso  $p$  dovrà essere data in funzione del modulo quadrato di questa ampiezza. Siccome sappiamo che la probabilità che un impulso abbia un certo valore  $p$  deve essere zero a meno che non sia uno stato per un impulso definito, solo se cerchiamo la probabilità di trovare un impulso in un intervallo  $dp$  attorno a  $p$  troveremo un valore finito. Allora in tal caso dobbiamo trovare un metodo per fare la normalizzazione tale che la probabilità sia connessa all'ampiezza attraverso la relazione

$$prob(p, dp) = | \langle impp | \phi \rangle |^2 \frac{dp}{2\pi h}$$

Con questa normalizzazione potremo scrivere l'equazione che ci permette di trovare la distribuzione degli impulsi per ogni stato  $|\phi\rangle$ .

$$\langle impp|\phi\rangle = \int e^{-ipx/\hbar} \langle x|\phi\rangle dx$$

Supponiamo che l'elettrone sia localizzato in una certa regione localizzata nell'intorno di  $x = 0$  e prendiamo una funzione d'onda che abbia la seguente forma:

$$\phi(x) = K e^{-x^2/4\sigma^2}$$

La distribuzione di probabilità in  $x$  per questa funzione d'onda è il suo modulo quadrato, ossia:

$$prob(x, dx) = P(x)dx = K^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

La funzione di densità di probabilità  $P(x)$  è una curva Gaussiana con il grosso della probabilità concentrato tra le semiapiezze  $\sigma$ . Per scegliere la costante  $K$  che non sia semplicemente proporzionale alla probabilità per unità di lunghezza in  $x$  di trovare l'elettrone, ma che abbia anche una scala tale che

$$P(x)\Delta x$$

sia uguale alla probabilità di trovare l'elettrone in  $\Delta x$  nei pressi di  $x = -\sigma$  e  $x = +\sigma$  imporremo che

$$\int P(x)dx = 1$$

per cui  $K = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$ . Allora la distribuzione in impulso è dato da:

$$\psi(p) = (8\pi\sigma^2)^{1/4} e^{-p^2\sigma^2/\hbar^2}$$

Ottenendo il risultato che l'ampiezza come funzione di  $p$  ha esattamente la stessa forma matematica dell'ampiezza come funzione di  $x$ , solo la larghezza gaussiana ha forma differente. Se pensiamo che la semiampiezza di  $\sigma$  della distribuzione in  $x$  è legata alla semiampiezza della distribuzione in  $p$  attraverso  $\eta$  dalla relazione:

$$\eta = \frac{\hbar}{2\sigma}$$

che rappresenta una sorta dell'imprecisione nella determinazione dell'impulso e della posizione dell'elettrone nello stato in cui ci troviamo. Ciò che risulta interessante è che la relazione può essere scritta come

$$\Delta p \Delta x = \hbar$$

Ciò che è interessante è che per ogni altra forma di distribuzione in  $x$  e  $p$  il prodotto

$$\Delta x \Delta p$$

non può essere minore del valore trovato. La distribuzione gaussiana dà il valore minimo possibile per il prodotto delle larghezze quadratiche medie. In generale si può dire:

$$\Delta p \Delta x > \frac{\hbar}{2}$$

è l'enunciazione quantitativa del principio di indeterminazione di Heisenberg.

## 4.1 Descrizione fisica dell'equazione di Schroedinger

Fino ad ora ci siamo preoccupati di trovare la descrizione di stati che si riferiscono ad un elettrone che possa trovarsi in un punto qualsiasi dello spazio. Ora dobbiamo preoccuparci di inserire nella nostra descrizione l'aspetto fisico delle varie circostanze che si possono presentare. Cioè dobbiamo cercare di vedere come variano gli stati nel tempo. Se abbiamo uno stato  $|\phi\rangle$  che si trasforma dopo un certo tempo in uno stato  $|\phi'\rangle$  possiamo descrivere la situazione facendo sì che la funzione d'onda sia una funzione del tempo oltre che delle coordinate. In tal caso esprimeremo la funzione d'onda come  $\phi(x, y, z, t)$ .

Per grandi lunghezze d'onda, cioè per piccoli valori del numero d'onda  $k$ , l'energia dello stato è proporzionale al quadrato del numero d'onda. Infatti se ritorniamo per un attimo alla relazione tra energia e momento di una particella libera con massa  $m$  avremo che:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

ma ricordando che

$$p = \hbar k$$

avremo

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Immaginiamo che l'elettrone possa non solo saltare sull'atomo più vicino con una ampiezza di probabilità per unità di tempo  $\frac{iA}{\hbar}$  ma abbia la probabilità di passare a quello che viene subito dopo con una ampiezza  $\frac{iB}{\hbar}$ . Troveremo che la soluzione può venire scritta nella forma

$$ae^{-ikx_n}$$

cioè che questo tipo di soluzione sia universale. Si troverà che anche gli stati stazionari con numeri d'onda  $k$  hanno una energia eguale dimostrando che la forma di Energia in funzione di  $k$  non è universale, ma dipende dalle ipotesi che si fanno sul problema. per piccoli valori di  $k$  l'energia è data da

$$E = Ak^2b^2$$

. Si trova quindi che l'energia dello stato è proporzionale al quadrato del numero d'onda che descrive le variazioni spaziali di  $C_n$ . Si è inoltre visto che gruppi di onde di questo tipo con energie una vicino all'altra possono dar luogo ad un pacchetto che si comporta come una particella classica con una massa data da

$$m_{eff} = \frac{\hbar^2}{2Ab^2}$$

Poichè le onde delle ampiezze di probabilità si comportano come particelle ci si può aspettare che la descrizione quantistica generale di una particella mostri quel tipo di comportamento ondulatorio che si osserva nei reticoli cristallini. Supponiamo di considerare il caso di un reticolo lineare ed immaginiamo di fare sempre più piccola la spaziatura reticolare. Al limite finiremo di considerare il caso in cui l'elettrone può trovarsi dovunque lungo la linea.. Cominciamo col richiamare alcuni principi generali della meccanica quantistica.

- Chiameremo "stato" una qualunque delle situazioni in cui l'elettrone può trovarsi e lo caratterizzeremo con un vettore di stato  $|\psi\rangle$
- Un'altra situazione sarà caratterizzata da un altro vettore di stato  $|\phi\rangle$
- ammettiamo che ci sia un insieme di stati  $|1\rangle |2\rangle$  etc che abbiano le seguenti proprietà
  1. Questi stati sono completamente distinti l'uno dall'altro: diciamo che sono ortogonali. Con questo intendiamo che per ogni coppia di stati di base  $|i\rangle, |j\rangle$  l'ampiezza  $\langle i|j\rangle$  che dà la probabilità che un elettrone che si trova nello stato  $|j\rangle$  possa venir osservato anche nello stato  $|i\rangle$  sia uguale a zero a meno che siano lo stesso stato.
  2. Gli stati di base  $|i\rangle$  devono formare un insieme completo cioè qualsiasi stato  $|\psi\rangle$  può essere completamente descritto dando tutte le ampiezze  $\langle i|\psi\rangle$  che corrispondono alla probabilità che una particella nello stato  $|\psi\rangle$  possa essere trovata anche nello stato  $i$ . Infatti il vettore di stato  $|\psi\rangle$  è uguale alla somma degli stati di base ciascuno moltiplicato per un coefficiente che è l'ampiezza dello stato  $|\psi\rangle$  nello stato  $|i\rangle$
  3. Se si considerano due stati qualunque  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , l'ampiezza dello stato  $|\phi\rangle$  nello stato  $|\psi\rangle$  può essere ricavata proiettando dapprima lo stato  $|\phi\rangle$  sugli stati di base e poi ciascuno di questi sullo stato  $|\psi\rangle$ .

Secondo le regole generali potremo scrivere un qualsiasi stato  $|\phi\rangle$  in ciascuno degli stati  $|n\rangle$  cioè:

$$C_n = \langle n|\phi\rangle$$

Per cui la variazione temporale di  $C_n$  è:

$$i\hbar \frac{\partial C_n}{\partial t} = E_0 C_n - A C_{n+b} - A C_{n-b}$$

dove gli ultimi due termini rappresentano il processo in cui l'elettrone arriva sull'atomo  $n$  dall'atomo  $(n+1)$  o dall'atomo  $(n-1)$ . Questa equazione ammette come soluzione :

$$C_n = e^{iEt/\hbar} e^{ikn}$$

Per gli stati di bassa energia, le lunghezze d'onda sono grandi ( $k$  è piccolo) e l'energia è legata a  $k$  da

$$E = (E_0 - 2A) + Ak^2b^2$$

Vediamo cosa succede se si fa tendere a zero la costante reticolare  $b$ , tenendo fisso il numero d'onda  $k$ . L'ultimo termine dell'equazione tende a zero e tutti gli effetti fisici scomparirebbero. Ma pensiamo di variare contemporaneamente sia  $A$  che  $b$  in modo tale che se  $b$  tende a zero il prodotto  $Ab^2$  resti costante. Riscriviamo l'equazione differenziale come:

$$i\hbar \frac{\partial C_n}{\partial t} = (E_0 - 2A)C_n + A[2C_n - C_{n+b} - AC_{n-b}]$$

Con questa scelta la  $E_0$  viene eliminato. Possiamo poi immaginare di avere una funzione  $C(x)$  che variando con regolarità assuma il valore corretto  $C_n$  ad ogni  $n$ . Facendo tendere a zero  $b$  i punti di  $n$  si avvicinano sempre di più e quindi la quantità in parentesi risulta proporzionale alla derivata seconda di  $C(i)$ . Si può scrivere, sviluppando in serie di Taylor:

$$2C_n - C_{n+b} - AC_{n-b} \approx -b^2 \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2}$$

Quindi per  $b$  che tende a zero, mantenendo il prodotto  $Ab^2$  costante si ha

$$ih \frac{\partial C_n}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 Cx}{\partial x^2}$$

Che è l'equazione quantistica di Schroedinger. Quando la scrisse ne diede una specie di derivazione basata su alcuni argomenti euristici e su brillanti congetture di carattere intuitivo. La scoperta delle leggi che regolano il moto degli elettroni su scala atomica fornì una teoria per mezzo della quale era possibile effettuare dei calcoli quantitativi dettagliati e precisi sui fenomeni atomici. Il limite è che l'equazione di Schroedinger spiega i fenomeni atomici eccetto quelli connessi con il magnetismo e alla relatività. Esso spiega i livelli di energia di un atomo e tutti i fatti relativi al legame chimico. E' tuttavia possibile tenere conto degli effetti magnetici in modo approssimato.

## 4.2 I livelli energetici quantizzati

Una delle conseguenze più notevoli della equazione di Schroedinger è quella che una equazione differenziale nella quale compaiano solo funzioni continue, di variabili spaziali continue, possa dar luogo ad effetti quantistici come i livelli energetici discreti degli atomi. Il fatto essenziale da capire è la ragione per cui un elettrone che sia confinato in una certa regione dello spazio da una qualche specie di buca di potenziale debba necessariamente possedere una energia facente parte di un ben definito insieme discreto di energie.

Supponiamo di considerare un elettrone in un caso unidimensionale la cui energia potenziale vari con  $x$  nel modo descritto da una buca di potenziale. Supponiamo che questo potenziale sia statico, cioè non vari con il tempo. Cerchiamo di trovare delle soluzioni che corrispondano a stati di energia definita o equivalentemente di frequenza definita. Vediamo cosa succede se abbiamo una soluzione del tipo

$$\phi = a(x)e^{-iEt/h}$$

Sostituendo nell'equazione di Schroedinger si trova che la funzione  $a(x)$  deve soddisfare alla seguente equazione differenziale.

$$\frac{d^2 a(x)}{dx^2} = \frac{2m}{h} [V(x) - E] a(x)$$

Se l'energia potenziale  $V$  è maggiore dell'energia della particella  $E$ , la velocità di variazione della pendenza di  $a(x)$  avrà lo stesso segno di  $a(x)$ , ciò significa che la curva di  $a(x)$  volgerà la



sua concavità in senso opposta all'asse ed avrà più o meno lo stesso carattere della funzione esponenziale positiva o negativa  $e^{\pm x}$ . Se d'altra parte la funzione potenziale  $V$  è minore dell'energia  $E$  la derivata seconda di  $a(x)$  rispetto ad  $x$  ha un segno opposto a quello di  $a(x)$  stessa e la curva volgerà la sua concavità verso l'asse. Poichè cerchiamo di descrivere una situazione in cui una particella è legata all'interno di una buca di potenziale, cercheremo delle soluzioni per le quali l'ampiezza dell'onda assuma valori molto piccoli per  $x$  al di fuori della buca di potenziale. Possiamo immaginare una curva che tenda a zero per valori negativi grandi di  $x$  e cresca dolcemente via via che si avvicina al bordo della buca di potenziale. Poichè in tal caso  $V = E_a$  la curvatura della funzione diviene nulla in questo punto. Tra i due bordi della buca la quantità  $V - E_a$  si mantiene sempre negativa così che la funzione  $a(x)$  rivolge sempre la concavità verso l'asse e la curvatura è tanto maggiore quanto maggiore è la differenza tra  $E_a$  e  $V$ . Continuando sul bordo estremo destro per valori positivi grandi. Per il valore scelto dell'energia  $E_a$  la soluzione  $a(x)$  aumenta sempre più al crescere di  $x$ . Infatti la sua curvatura cresce essa stessa all'aumentare di  $x$  (se contemporaneamente il potenziale rimane costante). L'ampiezza cresce a valori enormi il che significa che la particella non è legata alla buca di potenziale. E' più facile trovare la particella al di fuori della buca che all'interno. E' più probabile trovare l'elettrone a  $x = \infty$  che in qualsiasi altro posto. Non possiamo trovare una soluzione adatta per una particella legata. Usiamo allora una energia di poco più grande di  $E_a$  diciamo  $E_b$ . Partendo dalle stesse condizioni troviamo una soluzione che all'inizio sembra andare meglio ma poi finisce per essere ugualmente cattiva come prima con l'unica differenza che ora  $a(x)$  diviene sempre più negativa all'aumentare del valore di  $x$ . Forse c'è una via di uscita perchè può darsi che esista una energia compresa tra  $E_a$  e  $E_b$  tale per cui la curva tenda a zero per grandi valori di  $x$ . Difatti può esserci una soluzione solo se la particella possiede una energia ben definita. Questo non implica che ci sia una sola energia ed infatti si può concludere che se una particella è legata in una buca di potenziale la sua energia assume solo valori particolari, facenti parte di uno spettro discreto di energie descrivendo in pieno i fatti fondamentali della fisica quantistica.. Se l'energia  $E$  è superiore al massimo della buca di potenziale non vi sono più soluzioni discrete e tutte le energie sono permesse. Soluzioni di questo tipo corrispondono alla diffusione di particelle libere da parte della buca di potenziale ad esempio quando ci sono impurità atomiche in un cristallo.

### 4.3 Conclusioni

Ordinariamente la funzione d'onda che compare nell'equazione di Schroedinger si riferisce solo ad una o due particelle. La funzione d'onda stessa non è qualcosa che abbia un significato classico come il campo elettrico o altre cose del genere. La funzione d'onda è un campo, nel senso che è una funzione della posizione, tuttavia ci sono delle situazioni in cui la funzione d'onda della meccanica quantistica ha un significato classico. Il comportamento quantistico della materia su piccola scala non si fa abitualmente sentire a macroscale dove valgono le leggi di Newton. Esistono però dei casi in cui le peculiarità delle meccanica quantistica si rivelano in maniera particolare nella grande scala.

A bassa temperatura quando l'energia di un sistema è divenuta molto, molto piccola, invece di avere parecchi stati ce ne sono pochissimi e tutti prossimi allo stato fondamentale.

Vediamo come si comporta una particella in un campo magnetico usando l'equazione di Schroedinger e questo perchè i fenomeni superconduttivi sono connessi con i campi magnetici. Un campo magnetico esterno è descritto da un potenziale vettore. L'ampiezza relativa ad una particella che si sposta da un punto ad un altro lungo un certo cammino in presenza di un campo è uguale a quella relativa allo spostamento lungo lo stesso cammino, in assenza di campo, moltiplicata per l'esponenziale dell'integrale di linea lungo lo stesso cammino moltiplicata per la carica elettrica e divisa per la costante di Planck. Questa è una enunciazione fondamentale per la meccanica quantistica..

Un'altro concetto importante nell'equazione di Schroedinger per una particella singola è l'idea che la probabilità di trovare la particella in una certa posizione è data dal modulo quadrato della funzione d'onda. E' inoltre caratteristico della meccanica quantistica che la probabilità sia conservata in senso locale. Quando la probabilità di trovare un elettrone diminuisce in qualche posto, mentre cresce in un posto diverso ( sempre mantenendo la probabilità totale) vuol dire che qualcosa si trasferisce da un posto all'altro. In altre parole l'elettrone gode di una specie di continuità , nel senso che se la probabilità diminuisce in un posto ed aumenta da qualche altra parte allora vi è un qualche flusso tra i due punti. Se per esempio si interpone una parete tra i due la sua influenza si farà sentire e le probabilità non rimarranno le stesse. Quindi la enunciazione della probabilità non è una enunciazione completa della legge della conservazione, così come la sola conservazione dell'energia non è un principio tanto profondo ed importante come la conservazione locale dell'energia. Se dell'energia scompare vi deve corrispondere un flusso di energia. Allo stesso modo troveremo una corrente di probabilità tale per cui se c'è un qualche cambiamento di densità di probabilità questa possa essere considerata come dovuta al flusso entrante o uscente di una qualche corrente. Questa dimostra che la probabilità è conservata localmente. Se una particella sparisce da una certa regione non può apparire in un'altra senza che qualcosa passi da una parte all'altra.

Va detto che quando Schroedinger scoprì la sua equazione, egli scoprì la legge della conservazione come conseguenza della stessa, ma egli immaginò che  $P$  fosse la densità di carica dell'elettrone e che  $J$  fosse la densità di corrente e che quindi gli elettroni interagissero con il campo elettromagnetico attraverso queste cariche e correnti. Quando poi risolse la sua equazione per l'atomo di idrogeno e calcolò  $\phi$  egli non intendeva calcolare alcun tipo di probabilità. Solo Born interpretò correttamente la  $\phi$  dell'equazione di Schroedinger come un'ampiezza di probabilità, introducendo il concetto che il quadrato dell'ampiezza, non è la densità di carica, ma soltanto la probabilità per unità di volume di trovarvi l'elettrone e che quando troviamo l'elettrone in qualche posto lo troviamo con tutta la sua carica.

La funzione d'onda di un elettrone non descrive perciò un elettrone per così dire diffuso con una densità di carica continua. L'elettrone è qui o là o in un qualche altro posto, ma dovunque si trovi esso è sempre una carica puntiforme. Il guaio degli elettroni è che non se ne può mettere più di uno nello stesso stato. Perciò si pensò a lungo che la funzione d'onda dell'equazione di Schroedinger non avrebbe potuto avere una rappresentazione macroscopica analoga a quella dell'ampiezza per i fotoni. Ma proprio la superconduttività ci mette di fronte a tale situazione. In realtà si è visto che a bassissima temperatura alcuni metalli conducono la elettricità senza alcuna resistenza . In tal caso risulta che a causa della interazione degli elettroni con le vibrazioni degli atomi nel reticolo, si ha complessivamente una piccola

attrazione efficace tra elettroni. Il risultato è per dirla in modo qualitativo che gli elettroni formano delle coppie legate. In questo caso l'equazione di Schroedinger si applica ancora.